TEMA 0. OPERACIONES CON VECTORES

1. **Magnitudes físicas y su clasificación.**
2. **Operaciones geométricas con magnitudes vectoriales:**
   2.1 Suma y resta geométrica de vectores.
   2.2 Definición geométrica de producto de un escalar por un vector.
   2.3 Definición geométrica del producto escalar de dos vectores.
   2.4 Definición geométrica del producto vectorial de dos vectores.
3. **Coordenadas cartesianas o componentes de un vector: expresión analítica de un vector.**
4. **Operaciones analíticas con magnitudes vectoriales:**
   4.1 Suma y resta analítica de vectores.
   4.2 Definición analítica de producto de un escalar por un vector.
   4.3 Definición analítica del producto escalar de dos vectores.
   4.4 Definición geométrica del producto vectorial de dos vectores.
   4.5 Derivada de un vector.
5. **Vectores unitarios.**

1. MAGNITUDES FÍSICAS Y SU CLASIFICACIÓN

Una magnitud física es una propiedad de los cuerpos que se puede medir, es decir, que se puede expresar mediante una cantidad y su correspondiente unidad.

Una primera clasificación de las magnitudes físicas es:

- Magnitudes físicas fundamentales
- Magnitudes físicas derivadas.

Recuerda que las primeras se definen sin hacer uso de ninguna otra magnitud y que las segundas utilizan para su definición a una o varias de las primeras. La elección de las magnitudes fundamentales es arbitraria pero, el número de magnitudes fundamentales elegidas debe ser el mínimo que se necesite para definir coherentemente y con precisión a todas las demás (por esto se llaman derivadas).

Tanto las magnitudes físicas fundamentales como las derivadas se agrupan en sistemas de unidades. En la tabla siguiente se recogen las magnitudes fundamentales y sus unidades en el Sistema Internacional de Unidades (SI):

MAGNITUDES FUNDAMENTALES Y SUS UNIDADES EN EL SI		
MAGNITUD	**UNIDAD DE MEDIDA**	**SÍMBOLO**
Longitud	*metro*	*m*
Masa	*kilogramo*	*Kg*
Tiempo	*segundo*	*s*
Temperatura	*grado Kelvin*	*K*
Intensidad de corriente eléctrica	*amperio*	*A*
Intensidad luminosa	*candela*	*Cd*
Cantidad de materia	*mol*	*mol*
UNIDADES COMPLEMENTARIAS DEL SI		
Ángulo plano	*radián*	*rad*
Ángulo sólido	*estereoradian*	*sr*

Recuerda que la medida de cualquier magnitud física en una unidad la puedes cambiar a otra unidad equivalente y que el método más recomendable es el llamado “método de las fracciones unitarias”.

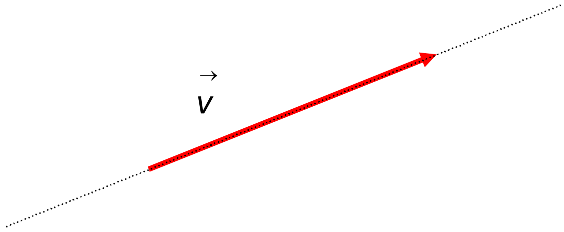
Desde otro punto de vista las magnitudes físicas se clasifican en:

- Magnitudes físicas escalares.
- Magnitudes físicas vectoriales

Recuerda que una magnitud física se dice que es escalar cuando queda perfectamente determinada mediante una cantidad y su correspondiente unidad. Este es el caso de la masa, temperatura, superficie, volumen, densidad, trabajo, etc.

Sin embargo para que una magnitud física vectorial quede perfectamente determinada no basta con dar la cantidad y su unidad, es necesario saber la dirección y el sentido (algunas veces también el punto de aplicación). Es el caso de la posición, velocidad, aceleración, fuerza, cantidad de movimiento, etc.

Las magnitudes físicas vectoriales se representan gráficamente mediante una flecha, denominada **VECTOR**, y se escribe simbólicamente con la letra que simboliza a la magnitud física con una flecha encima. Por ejemplo el vector velocidad sería:



En una magnitud física hemos de hablar de las siguientes características:

DIRECCIÓN: Es la recta que contiene al vector o que es paralela al vector.

SENTIDO: Es el extremo del vector.

MÓDULO: Es el valor numérico de la magnitud física y es directamente proporcional la longitud del vector. Se representa por:

$$|\vec{v}|$$

EJEMPLO 1º

Indica la dirección sentido y módulo de la magnitud física vectorial correspondiente en cada uno de los casos siguientes:

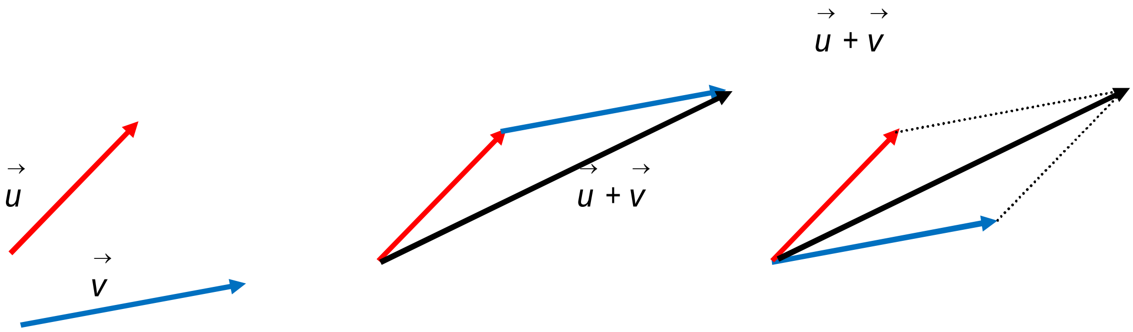
a) Coche que circula a 50 Km/h hacia la derecha.
b) Objeto que es lanzado verticalmente hacia arriba a 10 m/s.
c) Tren que se acerca al andén de la estación por tu derecha a 20 Km/h.
d) Aceleración de la gravedad terrestre.
e) Objeto que desciende a 5 m/s.
f) Moto que se acerca al paso de peatones por tu izquierda a 20 m/s.
g) Tu peso.
h) Balón que se chuta a 200 m/s con formando un ángulo de 45º con la horizontal.
i) Jugador de tenis que golpea la pelota hacia abajo formando 45º con la horizontal a 100 m/s.

2.- OPERACIONES GEOMÉTRICAS CON MAGNITUDES VECTORIALES.

Para operar con magnitudes escalares basta con manejar las cantidades y las unidades coherentes, pero para operar con magnitudes vectoriales no sólo hay que tener en cuenta la cantidad (módulo), hay que tener también en cuenta la dirección y el sentido. Recordemos las operaciones con vectores vistas los cursos anteriores y ampliemos a alguna más.

2.1 Suma y resta geométrica de vectores

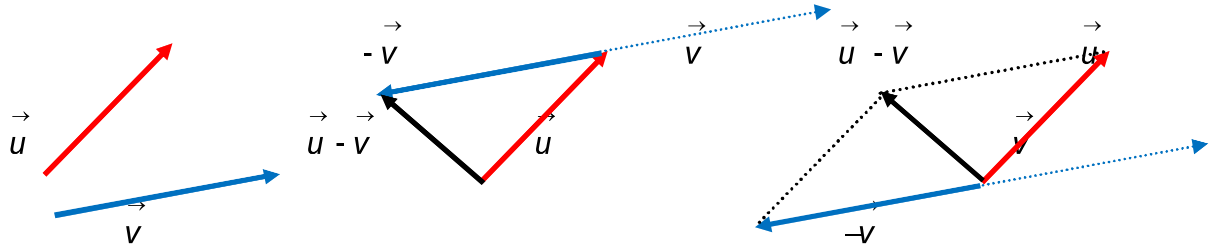
Para sumar geométricamente dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se sitúa uno de ellos a continuación del otro, y se une el origen del primero con el extremo del último:



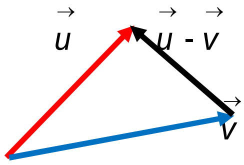
Puedes observar que cuando los vectores que sumas no tienen la misma dirección, su suma coincide con la diagonal del paralelogramo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

Para restar geométricamente dos vectores $\vec{u} - \vec{v}$, se le suma a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$ y se procede a realizar la suma como se ha explicado.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



Observa como en este caso el vector $\vec{u} - \vec{v}$, es el vector que une el extremo del segundo con el extremo del primero.



2.2 Definición geométrica de producto de un escalar por un vector

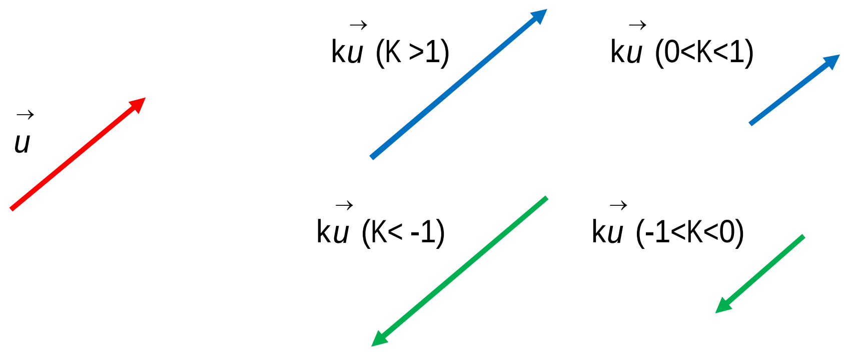
Se llama producto de un escalar por un vector, al producto de un nº real k, por un vector $\vec{u}$.

Se representa por $k.\vec{u}$, y el resultado es un nuevo vector que tiene las siguientes características:

Dirección: la misma que $\vec{u}$.

Sentido: el mismo que $\vec{u}$, si el escalar es positivo y, contrario a $\vec{u}$, si el escalar es negativo.

Módulo: el valor absoluto del escalar por el módulo de $\vec{u}$: $|k.\vec{u}| = |k|.|\vec{u}|$



2.3 Definición geométrica de producto escalar de dos vectores.

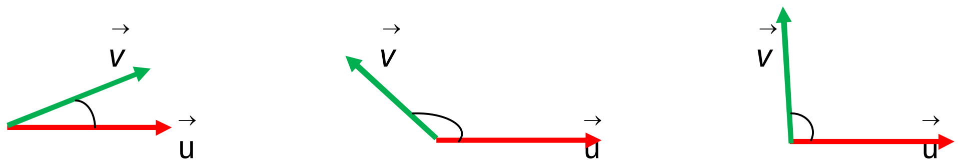
El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que se representa por $\vec{u}.\vec{v}$, es un escalar que se obtiene de multiplicar los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})}$$

COMENTARIOS: De la definición geométrica del producto escalar podemos deducir lo siguiente:

1º.- El producto escalar de dos vectores puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del valor del coseno del ángulo que forman:

- o Si el ángulo que forman los vectores es agudo (coseno +), el producto escalar es positivo, si el ángulo es obtuso (coseno -), el producto escalar es negativo.
- o Si los vectores son perpendiculares, el producto escalar es 0, puesto que cos 90º = 0. Esta propiedad sirve como **CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD ENTRE DOS VECTORES.**



$\vec{u}.\vec{v} > 0$ $\qquad$ $\vec{u}.\vec{v} < 0$ $\qquad$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$

2º.- Si multiplicamos escalarmente al vector por sí mismo, obtenemos una expresión que nos permite calcular el módulo del vector a partir de sus coordenadas:

$$\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos(\vec{u},\vec{u}) = |\vec{u}|^2 \cos 0º = |\vec{u}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$$

3º.- Si despejamos el coseno en la definición geométrica, obtenemos la expresión:

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}}$$

De modo que si conocemos el módulo de los dos vectores y el valor de su producto escalar, podemos conocer el ángulo que forman dichos vectores.

2.4 Definición geométrica de producto vectorial de dos vectores.

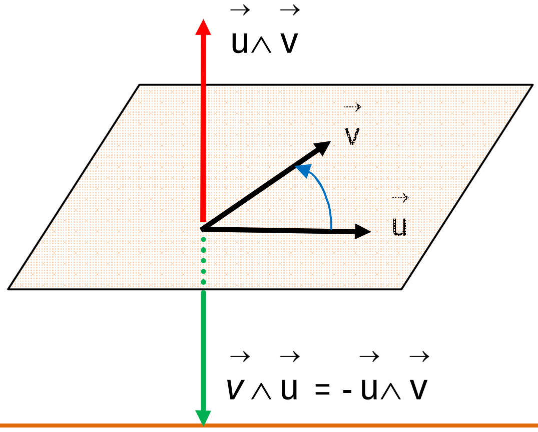
El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que se representa por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ o bien por $\vec{u} \times \vec{v}$, es un nuevo vector que tiene las siguientes características:

<u>Módulo:</u> es el producto del módulo de los vectores que se multiplican por el seno del ángulo que forman ambos vectores

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\vec{u}, \vec{v})$$

<u>Dirección:</u> perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, perpendicular al plano que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

<u>Sentido:</u> el de avance de un tornillo al girar el primer vector hacia el segundo por el camino más corto.



COMENTARIOS:

De la definición geométrica del producto vectorial podemos deducir lo siguiente:

1º.-Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (paralelos o antiparalelos), su producto vectorial es nulo, ya que los vectores formarían entre sí un ángulo de 0º o 180º, y en ambos casos el seno vale 0.

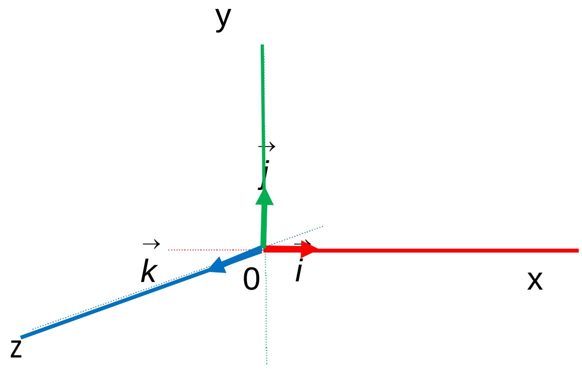
2º.- Si los vectores son perpendiculares su producto vectorial es máximo, ya que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formarían 90º y su seno vale 1.

3º.- El producto vectorial de dos vectores no es conmutativo, como puede verse en el dibujo:

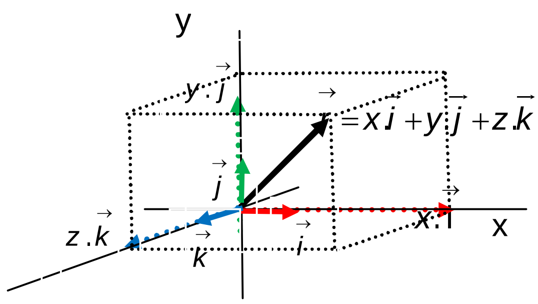
$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

3.- COORDENADAS CARTESIANAS O COMPONENTES DE UN VECTOR

El **sistema de coordenadas cartesiano** está formado por tres rectas perpendiculares entre sí, llamados **ejes de coordenadas cartesianos**, que se cortan en un punto O que es el origen de coordenadas. Los tres ejes son el **"eje x"**, el **"eje y"** y el **"eje z"**.



Si en cada uno de los ejes se define un vector unitario (de modo la unidad) y de sentido positivo (son los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$), cualquier vector $\vec{r}$ del espacio puede expresarse como una combinación lineal de los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ Como puede verse en el siguiente dibujo:



A la expresión:

$$\boxed{\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \quad ó \quad \vec{r} = (x, y, z)}$$

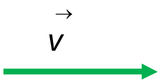
se le denomina **EXPRESIÓN ANALÍTICA O EXPRESIÓN VECTORIAL DEL VECTOR** $\vec{r}$.

A los escalares x, y, z se les denomina **COORDENADAS CARTESIANAS O COMPONENTES CARTESIANAS DEL VECTOR** $\vec{r}$.

COMENTARIOS:

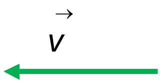
1º.- Cuando la dirección del vector es paralela a uno de los tres ejes de coordenadas, entonces el vector tiene sólo una coordenada distinta de cero: aquella que corresponde al eje respecto al cual es paralelo. Además, la coordenada no nula será positiva si el sentido del vector coincide con el sentido positivo del eje y negativa si es al contrario.

Por ejemplo, si un coche se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad de 10 m/s, la expresión analítica de su vector velocidad es:



$$\boxed{\vec{v} = 10\,\vec{i}\ m/s = 10\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\ m/s = (10,0,0)\,m/s} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dirección: horizontal} \\ \text{Sentido: derecha} \\ \text{Módulo: } 10\,m/s \end{cases}$$

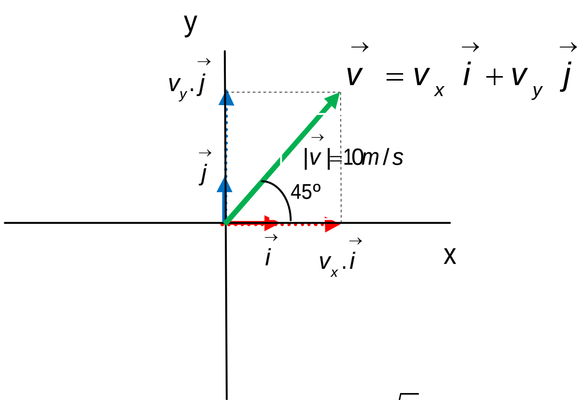
Si el coche se mueve ahora hacia la izquierda con la misma velocidad de 10 m/s, la expresión analítica de su vector velocidad es:



$$\boxed{\vec{v} = -10\,\vec{i}\ m/s = -10\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\ m/s = (-10,0,0)\,m/s} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dirección: horizontal} \\ \text{Sentido: izquierda} \\ \text{Módulo: } 10\,m/s \end{cases}$$

2º.- Si el vector está contenido en el plano XY y su dirección no coincide con ninguno de los dos ejes, entonces el vector tendrá las dos primeras componentes distintas de cero y la tercera igual a cero.

Por ejemplo, supongamos que se dispara un proyectil con una velocidad de 100 m/s formando un ángulo de 45º con la parte positiva de eje x. Escribe la expresión analítica del vector velocidad.



$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} v_x = |\vec{v}|.\cos 45º = 100\cos 45º = 100.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,m/s \\ v_y = |\vec{v}|.sen\,45º = 100 sen\,45º = 100.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,m/s \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = 50\sqrt{2}\,\vec{i} + 50\sqrt{2}\,\vec{j}\ m/s$$

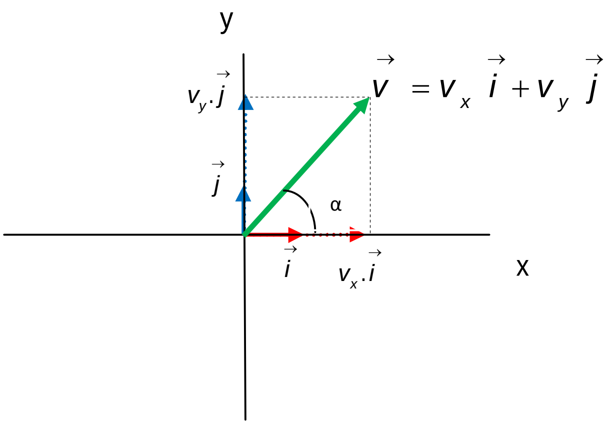
$$\boxed{\vec{v} = 50\sqrt{2}\,\vec{i} + 50\sqrt{2}\,\vec{j}\ m/s = 50\sqrt{2}\,\vec{i} + 50\sqrt{2}\,\vec{j} + 0\vec{k}\ m/s}$$

Observa como las dos coordenadas son positivas ya que el vector está orientado en el primer cuadrante.

La forma general de calcular las coordenadas de un vector en el plano XY, aplicando la trigonometría es:

$$\boxed{\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} v_x = |\vec{v}|.\cos\alpha \\ v_y = |\vec{v}|.sen\alpha \end{cases}}$$

Siendo α el ángulo que forma el semieje positivo de las x con el vector. El signo del seno y el coseno de este ángulo te proporcionará el signo de las coordenadas del vector.



3º.- Si el vector está contenido en los planos XZ ó YZ, siempre haba una coordenada nula: la coordenada "y" en el primer caso, y la coordenada "x" en el segundo.

4º.- Cuando el vector no coincida con ninguno de los ejes, ni con los planos XY, XZ ó YZ, entonces las tres coordenadas del vector serán distintas de cero.

EJEMPLO 2º

Indica la expresión analítica de la magnitud física vectorial correspondiente en cada uno de los casos siguientes:

a) Coche que circula a 50 Km/h hacia la derecha.
b) Objeto que es lanzado verticalmente hacia arriba a 10 m/s.
c) Tren que se acerca al andén de la estación por tu derecha a 20 Km/h.
d) Aceleración de la gravedad terrestre.
e) Objeto que desciende a 5 m/s.
f) Moto que se acerca al paso de peatones por tu izquierda a 20 m/s.

g) Tu peso.
h) Balón que se chuta a 200 m/s con formando un ángulo de 45º con la horizontal.
i) Jugador de tenis que golpea la pelota hacia abajo formando 45º con el semieje horizontal positivo a 100 m/s.
j) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia S.
k) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia NE.
l) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia SE.
m) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia NNO.

4.- OPERACIONES CON VECTORES EN FORMA ANALÍTICA

Supongamos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ expresados en forma analítica:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

4.1 Suma y resta analítica de vectores

Se define la suma analítica de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como es vector que se obtiene de sumar las coordenadas semejantes:

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v} = (u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z) = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z) = (u_x + v_x)\vec{i} + (u_y + v_y)\vec{j} + (u_z + v_z)\vec{k}}$$

Se define la resta analítica de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como es vector que se obtiene de restar a las coordenadas del primero, las coordenadas semejantes del segundo:

$$\boxed{\vec{u}-\vec{v} = (u_x, u_y, u_z) - (v_x, v_y, v_z) = (u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - v_z) = (u_x - v_x)\vec{i} + (u_y - v_y)\vec{j} + (u_z - v_z)\vec{k}}$$

4.2 Producto de un escalar por un vector en forma analítica

Se define el producto de un escalar k por un vector $\vec{u}$, como el vector que se obtiene de multiplicar cada una de sus coordenadas por el escalar:

$$\boxed{k.\vec{u} = k.(u_x, u_y, u_z) = (k.u_x, k.u_y, k.u_z) = k.u_x\vec{i} + k.u_y\vec{j} + k.u_z\vec{k}}$$

4.3 Producto escalar de dos vectores en forma analítica

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, escrito en forma analítica es un escalar que se obtiene de multiplicar las coordenadas semejantes de ambos vectores y sumar los resultados:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = (u_x, u_y, u_z).(v_x, v_y, v_z) = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z}$$

COMENTARIOS

1º.- Recuerda que el 2º comentario de la definición geométrica del producto escalar nos decía que si multiplicamos escalarmente al vector por sí mismo, obtenemos una expresión que nos permite calcular el módulo del vector a partir de sus coordenadas:

$$\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos(\vec{u},\vec{u}) = |\vec{u}|^2 \cos 0º = |\vec{u}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$$

Y si ahora sustituimos el producto escalar por su expresión analítica:

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 +, u_z^2}}$$

Obtenemos que el módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus coordenadas.

2º.- Recuerda igualmente que, según el tercer comentario, si despejamos el coseno en la definición geométrica, obtenemos una expresión que nos permitía conocer el coseno del ángulo que forman los vectores y, a partir de él, calcular el ángulo que forman los vectores:

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}}$$

Y si ahora sustituimos el producto escalar por su expresión analítica y también el módulo de los vectores, queda la expresión:

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 +, u_z^2}.\sqrt{v_x^2 + v_y^2 +, v_z^2}}}$$

De modo que si conocemos las coordenadas de los vectores, podemos conocer el ángulo que forman.

4.4 Producto vectorial de dos vectores en forma analítica

La expresión analítica del vector que resulta de un producto vectorial entre dos vectores se obtiene del siguiente modo:

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{k}}$$

4.5 Derivada de un vector en forma analítica

La derivada de un vector es otro vector que se obtiene de derivar cada una de sus coordenadas y se escribe:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{v}' = v_x'\vec{i} + v_y'\vec{j} + v_z'\vec{k}}$$

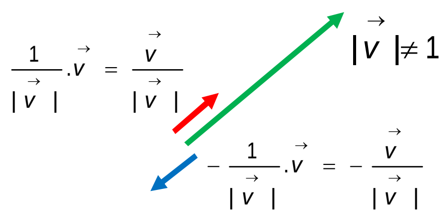
5. VECTORES UNITARIOS

Un vector es unitario cuando su módulo vale la unidad.

Si un vector $\vec{v}$ no es unitario, podemos hallar dos vectores unitarios de la misma dirección que él: uno en el mismo sentido y otro en sentido contrario.

Para ello basta con multiplicar al vector $\vec{v}$ por la inversa de su módulo o cambiar de signo dicho producto, respectivamente.

$$\boxed{\text{Si } |\vec{v}| \neq 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{|\vec{v}|}.\vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad ó \quad -\frac{1}{|\vec{v}|}.\vec{v} = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \text{ tienen de módulo la unidad}}$$



EJEMPLO 3º

Dados los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ $\quad \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ Calcula:

a) La suma: $\vec{u} + \vec{v}$

b) La resta: $\vec{u} - \vec{v}$

c) El producto del escalar 3 por el vector $\vec{u}$: $3.\vec{u}$

d) El producto escalar de ambos vectores: $\vec{u} . \vec{v}$

e) El módulo de cada uno de los vectores: $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$

f) El ángulo que forman ambos vectores.

g) El producto vectorial de ambos vectores: $\vec{u} \wedge \vec{v}$

h) Vector unitario de la misma dirección y sentido que $\vec{u}$. Comprueba que es unitario.

i) Vector unitario de la misma dirección y sentido contrario que $\vec{u}$. Comprueba que es unitario.

EJEMPLO 4º

Responde a los mismos apartados del ejercicio anterior con los vectores:

$$\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \qquad \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

EJEMPLO 5º

Comprueba el valor de los siguientes productos escalares entre los vectores unitarios:

$$\vec{i}.\vec{i} \qquad \vec{i}.\vec{j} \qquad \vec{i}.\vec{k} \qquad \vec{j}.\vec{j} \qquad \vec{j}.\vec{k} \qquad \vec{k}.\vec{k}$$

a) Aplicando la definición geométrica.

b) Aplicando la definición analítica.

Soluc: 1, 0, 0, 1, 0 y 1

EJEMPLO 6º

Comprueba los siguientes productos vectoriales:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} \qquad \vec{i} \wedge \vec{j} \qquad \vec{i} \wedge \vec{k} \qquad \vec{j} \wedge \vec{i} \qquad \vec{j} \wedge \vec{j} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} \qquad \vec{k} \wedge \vec{j} \qquad \vec{k} \wedge \vec{k}$$

a) Aplicando la definición geométrica.

b) Aplicando la definición analítica.

Soluc: $\vec{0}$, $\vec{k}$, $-\vec{j}$, $-\vec{k}$, $\vec{0}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $-\vec{i}$, $\vec{0}$

TEMA 1. DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

1. **Introducción.**
2. **Movimiento, trayectoria, espacio recorrido, vector de posición y vector desplazamiento.**
3. **Vectores velocidad instantánea y aceleración instantánea.**
4. **Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleración normal o centrípeta y aceleración instantánea.**
5. **Clasificación de los movimientos.**
6. **MRU.**
7. **MRUA.**
8. **MCU.**
9. **Composición de movimientos: movimiento parabólico.**
10. **Cantidad de movimiento o momento lineal.**
11. **Las Leyes de la Dinámica ó Leyes de Newton.**
12. **La fuerza de rozamiento.**
13. **Fuerza centrípeta.**

1. INTRODUCCIÓN

En física se denomina **punto material o partícula** a aquel objeto que tiene masa pero que no tiene dimensiones. En realidad, cuando la física considera a un cuerpo como un punto material, no es que carezca de volumen sino que este no ha de ser tenido en cuenta para el fenómeno que se está estudiando.

2. MOVIMIENTO, TRAYECTORIA, ESPACIO RECORRIDO, VECTOR DE POSICIÓN Y VECTOR DESPLAZAMIENTO

Se denomina ***movimiento*** al cambio de posición de un cuerpo respecto a un punto que se toma como referencia, denominado sistema de referencia. De la definición se deduce claramente que el movimiento es un concepto relativo, es decir, un mismo objeto puede estar en movimiento respecto a un sistema de referencia y al mismo tiempo estar en reposo respecto a otro sistema de referencia diferente.

En movimiento, se denomina ***trayectoria*** a la línea imaginaria que une las sucesivas posiciones por las que va pasando un cuerpo. Esta puede ser rectilínea, curvilínea (circular, elíptica, parabólica, etc.) o una sucesión de ambas.

En un movimiento, se denomina ***espacio recorrido*** a la longitud de la trayectoria.

Se denomina ***vector de posición*** de una partícula, respecto a un sistema de referencia, al vector que va desde el origen del sistema de referencia a la posición que ocupa la partícula. Se representa por $\vec{r}$.

El vector de posición de una partícula que se mueve respecto a un sistema de referencia será función del tiempo (sólo será constante cuando la partícula esté en reposo respecto a dicho sistema) y por eso podemos escribir:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

El módulo del vector de posición nos indicará a qué distancia estará la partícula del sistema de referencia en cada instante.

Llamamos ***ecuaciones cartesianas del vector de posición*** a las expresiones analíticas de sus componentes x(t), y(t) y z(t), que corresponden con tres ecuaciones escalares.

En general serán tres las ecuaciones cartesianas de la posición, pero si la partícula se mueve solamente a lo largo de uno de los ejes de coordenadas entonces la única coordenada distinta de 0 del vector de posición será la de ese eje, pudiendo prescindir de las otras dos coordenadas ya que serían nulas, y por tanto, habrá una sola ecuación cartesiana de la posición.

Se llama ***vector desplazamiento*** entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2, a la diferencia entre los vectores de posición en el instante final t_2, y el vector de posición en el instante inicial t_1,. Se representa por $\Delta\vec{r}$ y se calcula:

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}$$

Teniendo en cuenta la definición geométrica de la resta entre dos vectores, puede observarse que el vector desplazamiento coincide gráficamente con el vector que va desde la posición inicial a la posición ocupada en el instante final (figura 1.1).

El módulo del vector desplazamiento nos indicará la distancia que separa en línea recta las dos posiciones ocupadas por la partícula. En general, esta distancia será menor que el espacio recorrido. El módulo del vector desplazamiento sólo coincidirá con el espacio recorrido cuando la trayectoria sea rectilínea y no se invierta el sentido del movimiento.

En la gráfica siguiente se puede observar los vectores de posición de una partícula, respecto a un sistema de referencia, en dos instantes de tiempo diferentes, la trayectoria y el vector desplazamiento entre esos dos mismos instantes:

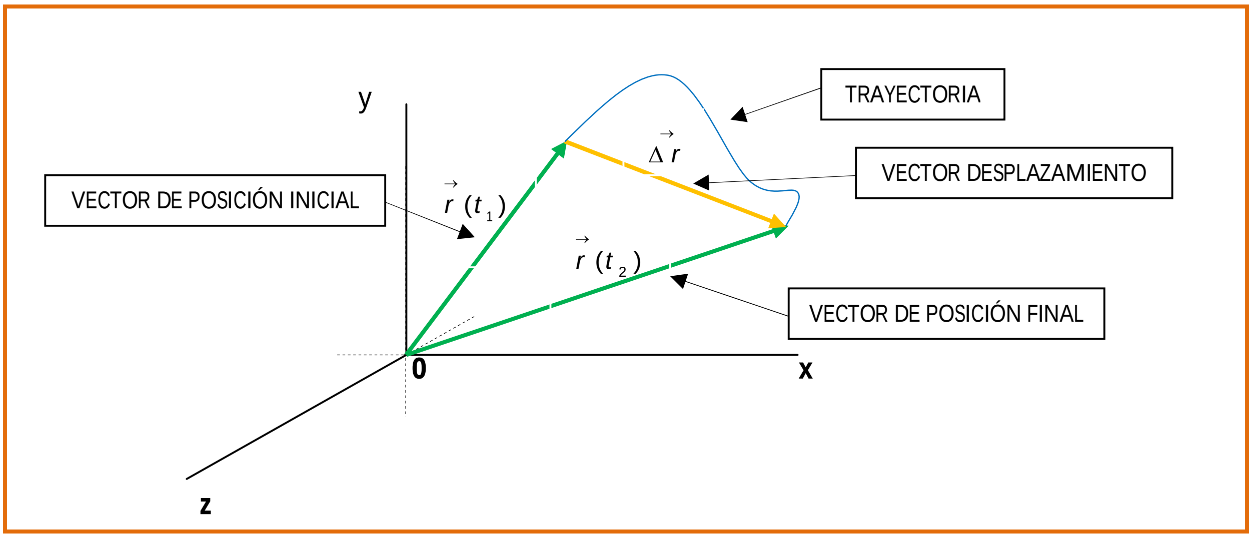


Figura 1.1
Vector de posición, vector desplazamiento y trayectoria

3. VECTORES VELOCIDAD INSTANTÁNEA Y ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

El vector velocidad instantánea es el vector que indica la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo. Es un vector tangente a la trayectoria en cada punto de ella y de sentido el del movimiento. Se calcula derivando respecto al tiempo el vector de posición instantáneo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}}$$

El vector aceleración instantánea es el vector que indica la aceleración de la partícula en cualquier instante de tiempo. Se calcula derivando respecto al tiempo el vector de posición instantáneo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \vec{v}\,'(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}\,''(t) = v_x'(t)\vec{i} + v_y'(t)\vec{j} + v_z'\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k} = \\ &= a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}\end{aligned}}$$

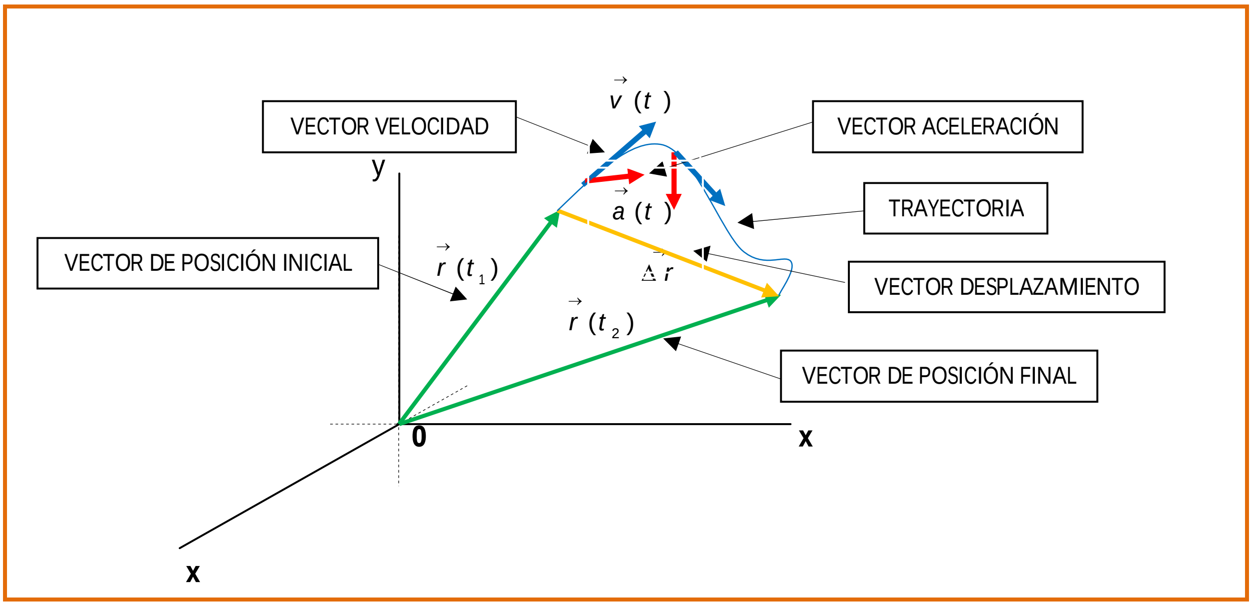


Figura 1.2
Vectores velocidad y aceleración instantáneos

4. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN:ACELERACIÓN NORMAL O CENTRÍPETA Y ACELERACIÓN TANGENCIAL

El vector aceleración mide los cambios en el vector velocidad por unidad de tiempo. Por tanto si el vector velocidad no se modifica a lo largo del tiempo, la aceleración vale 0.

Pero la velocidad es un vector y por tanto se caracteriza por tener módulo, dirección y sentido. Esto quiere decir que basta que una sola de estas características se modifique para que podamos afirmar que la velocidad no es constante.

En los movimientos rectilíneos la dirección de la velocidad no varía. El módulo puede que sí o puede que no.

En los movimientos curvilíneos la dirección y el sentido de la velocidad está cambiando continuamente. El módulo puede que sí o puede que no.

Por tanto en los movimientos rectilíneos habrá aceleración si cambia el módulo de la velocidad mientras que en los movimientos curvilíneos siempre habrá aceleración cambie o no el módulo de la velocidad.

En un movimiento en el que hay aceleración siempre es posible descomponer al vector aceleración en dos componentes, llamadas ***componentes intrínsecas de la aceleración***:

- una componente tangente a la trayectoria llamada ***aceleración tangencial***.
- Y una componente perpendicular a la trayectoria llamada ***aceleración normal o centrípeta.***

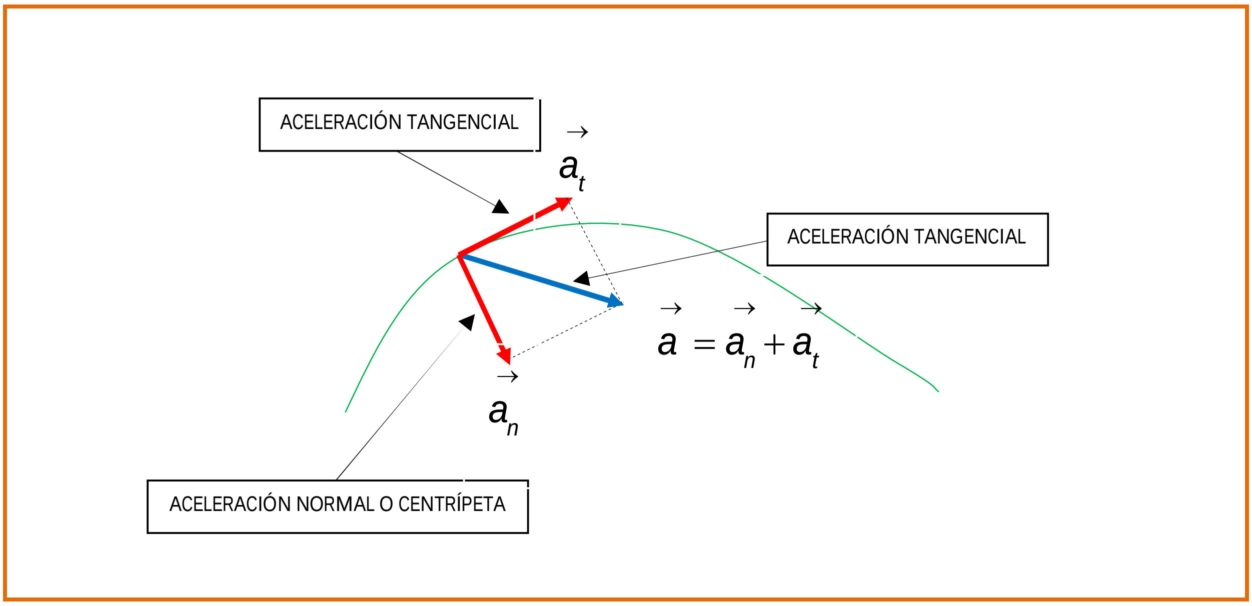


Figura 1.3
Componentes intrínsecas de la aceleración

La aceleración tangencial mide los cambios en el módulo de la velocidad mientras que la aceleración normal o centrípeta mide los cambios en la dirección (y por tanto también en el sentido) de la velocidad.

Por tanto, en los movimientos rectilíneos nunca habrá aceleración normal o centrípeta. Si en un movimiento rectilíneo hay aceleración será tangencial.

Sin embargo en los movimientos curvilíneos siempre habrá aceleración normal o centrípeta ya que siempre hay cambios en la dirección de la velocidad. En estos movimientos, si el módulo de la velocidad cambia, también habrá aceleración tangencial.

Las características de las componentes intrínsecas de la aceleración son:

ACELERACIÓN TANGENCIAL:

MÓDULO: $$\boxed{|\vec{a}_t| = \frac{d\,|\vec{v}\,|}{dt} \; o \quad simplemente \quad a_t = \frac{dv}{dt}}$$

DIRECCIÓN: tangente a la trayectoria.

SENTIDO: el del movimiento si la velocidad aumenta o contrario al movimiento si la velocidad disminuye.

ACELERACIÓN NORMAL O CENTRÍPETA:

MÓDULO: $$\boxed{|\vec{a}_n| = |\vec{a}_c| = \frac{|\vec{v}\,|^2}{R} \; o \quad simplemente \quad a_n = a_c = \frac{v^2}{R}}$$

DIRECCIÓN: perpendicular a la trayectoria.

SENTIDO: hacia el centro de la trayectoria.

RELACIÓN ENTRE LA ACELERACIÓN Y SUS COMPONENTES INTRÍNSECAS:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t}$$

MÓDULO: $$\boxed{|\vec{a}\,| = \sqrt{|\vec{a}_c|^2 + |\vec{a}_c|^2}}$$

EJEMPLO 1º

El vector de posición instantáneo de una partícula que se mueve por el espacio, en unidades del SI, es:

$$\vec{r}(t) = (t^2 - t)\vec{i} + (4 - 2t)\vec{j} + t^3\vec{k}$$

Para dicha partícula calcula:

a) La posición inicial. b) La posición a los 3 s.

c) La distancia a la que se encuentra la partícula a los 5 s.

d) El vector desplazamiento entre los instantes 3 y 5 s.

e) El vector velocidad instantánea. f) La velocidad inicial.

g) El módulo de la velocidad a los 2 s. h) El vector aceleración instantánea.

i) El módulo de la aceleración a los 10 s.

EJERCICIO 1º

Las coordenadas cartesianas del vector de posición de una partícula que se mueve por el plano XY vienen dadas por las siguientes expresiones, en unidades del SI:

$$\begin{cases} x(t) = -t^2 + 2 \\ y(t) = 3t - 2 \end{cases}$$

Para dicha partícula responde a los mismos apartados del ejemplo anterior.

EJEMPLO 2º

La posición instantánea de una partícula que se mueve a lo largo del eje de abscisas viene dada por la expresión:

$$x(t) = t^2 - 6t + 1$$

en unidades SI. Calcular:

a) La velocidad y la aceleración con la que se mueve el cuerpo en cualquier instante.

b) La posición inicial y la velocidad inicial.

c) La posición y la velocidad a los 4s.

d) ¿Ha cambiado el sentido del movimiento? ¿Por qué?

e) ¿Se anula la velocidad en algún momento? ¿Cuándo?

f) Calcula el espacio recorrido en los 5 primeros segundos?

EJERCICIO 2º

La posición de un punto material que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo según la expresión:

$$x(t) = 4t^2 - 3t + 11$$

donde x se mide en metros y t en segundos. Responde a los mismos apartados del ejemplo anterior.

SOLUC: a) v(t) = 8t-3 m/s a(t)=8 m/s^2 b) x_0=11 m v_0=-3 m/s c) x(t=4s) = 63 m v(t=4s) = 29 m/s d) si e) si a t = 3/8 s f) e = 86,125 m

5. CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS

Los movimientos se clasifican atendiendo a dos puntos de vista: según la trayectoria y según el módulo de la velocidad.

TRAYECTORIA
- Rectilíneos
- Curvilíneos: circulares, parabólicos, elípticos, etc.

MÓDULO DE LA VELOCIDAD
- UNIFORMES: $|\vec{v}|$ = cte
- VARIADOS
  - uniformemente variados: $|\vec{v}|$ varía de forma uniforme
  - variados de forma no uniforme: $|\vec{v}|$ varía de forma no uniforme

6. MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORME (MRU)

Tiene trayectoria rectilínea y modulo de velocidad constante, es decir, el vector velocidad es constante y, por tanto, no hay aceleración.

La ecuación del movimiento o ecuación de la posición de un MRU sería:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,.t \qquad ó \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_x\,.t \\ y(t) = y_0 + v_y\,.t \\ z(t) = z_0 + v_z\,.t \end{cases}}$$

Si la partícula se mueve solo a lo largo del eje x, la ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v\,.t}$$

que es la ecuación que conoces de los cursos anteriores.

El espacio recorrido por el móvil en un tiempo t puede calcularse como: $\boxed{e = v\,.t}$

7. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA)

Tiene trayectoria rectilínea y modulo de velocidad varía de forma uniforme, es decir, sólo tiene aceleración tangencial y es constante.

La ecuación del movimiento o ecuación de la posición de un MRUA sería:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 . t + \frac{1}{2}\vec{a} . t^2 \quad ó \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} . t + \frac{1}{2} a_x . t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y} . t + \frac{1}{2} a_y . t^2 \\ z(t) = z_0 + v_{0z} . t + \frac{1}{2} a_z . t^2 \end{cases}$$

Si la partícula se mueve solo a lo largo del eje x, la ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 . t + \frac{1}{2} a . t^2}$$

La ecuación paramétrica de la velocidad es: $\boxed{v(t) = v_0 + a . t}$

El espacio recorrido en un tiempo t, cuando no se invierte el sentido del movimiento, se calcula:

$$\boxed{e = v_0 . t + \frac{1}{2} a . t^2}$$

que son las ecuaciones que conoces de los cursos anteriores.

Aunque aún te será más familiar la que corresponde a un MRUA en la dirección vertical, el eje y, cuya ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_0 . t + \frac{1}{2} a . t^2}$$

y en concreto cuando se trata de un ***movimiento de caída libre***, es decir, con la sola presencia de la fuerza de la gravedad (sin rozamiento con el aire), donde siempre conocemos el valor de la aceleración, a, que es la aceleración de la gravedad. Como recordarás se simboliza por la letra g y en el caso de movimientos de caída libre en las proximidades de la superficie de la tierra vale -9,8 m/s^2. La ecuación paramétrica de la posición o ecuación del movimiento de caída libre en las proximidades de la tierra sería:

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_0 . t + \frac{1}{2} g . t^2 = y_0 + v_0 . t - 5t^2}$$

Recordarás también la siguiente ecuación en la que no aparece el tiempo: $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2ae}$

esta ecuación algunas veces presenta problemas cuando despejamos la v y/o v_0 en movimientos con aceleración negativa.

EJEMPLO 3º

Dos atletas están separados 200 m y corren a su encuentro con velocidades respectivas de 8 y 10 m/s. Calcula:

a) Las ecuaciones del movimiento de ambos corredores.
b) El punto de encuentro y el instante en que lo harán.
c) El espacio recorrido por cada uno de ellos hasta ese momento.

EJEMPLO 4º

Un coche inicialmente en reposo persigue a una moto que se encuentra 50 m por delante de él. La moto circula a velocidad constante de 20 m/s mientras que el coche acelera uniformemente a 4 m/s^2. Calcula:

a) Las ecuaciones del movimiento de ambos vehículos.
b) ¿Dónde y cuándo se encontrarán?
c) El espacio recorrido por cada vehículo hasta ese momento y contado desde el instante en que comenzó a moverse el coche.

EJEMPLO 5º

Desde la terraza de un edificio de 80 m se lanza hacia abajo a un objeto con una velocidad de 5 m/s. Simultáneamente se lanza desde el suelo otro objeto con una velocidad de 30 m/s. Hallar:

a) Las ecuaciones del movimiento de cada objeto.
b) ¿Dónde y cuándo se cruzarán?
c) El segundo cuerpo ¿estará subiendo o bajando?. ¿Por qué?
d) El espacio recorrido por cada uno de ellos hasta el momento del encuentro.

EJERCICIO 3º

Desde dos pueblos A y B separados por una distancia de 10 Km, salen al encuentro dos automóviles con velocidades de 72 Km/h y 108 Km/h. Calcular:

a) Las ecuaciones de movimiento de ambos automóviles.
b) El tiempo que tardan en cruzarse.
c) La distancia a la que están ambos automóviles del pueblo A en ese momento.
d) El espacio que ha recorrido cada coche hasta ese momento.

SOLUC: b) 200 s c) 4000 m d) 4000 m y 6000 m respectivamente

EJERCICIO 4º

Desde una ventana a 15 m del suelo, se deja caer un cuaderno. Al mismo tiempo, desde el suelo se lanza un lápiz con una velocidad inicial de 12 m/s.Hallar:

a) La ecuación del movimiento de cada objeto.
b) ¿Dónde y cuándo se cruzan?.

SOLUC: a) $y_1 = 15 - 4{,}9t^2$ $y_2 = 12t - 4{,}9t^2$ *b) A los 1,25 s y a 7,3 m del suelo*

8. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

Es un movimiento con trayectoria circular y módulo de velocidad constante. No tiene, por tanto, aceleración tangencial pero sí tiene aceleración normal o centrípeta. En la figura siguiente pueden verse los vectores velocidad y aceleración en diferentes puntos de la trayectoria:

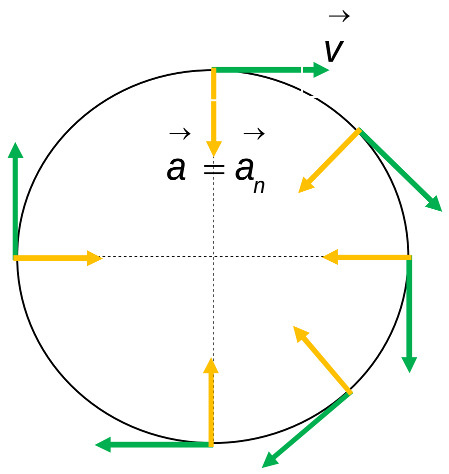


Figura 1.4
Vectores velocidad y aceleración en un MCU

Observa en la figura que el módulo del vector velocidad es el mismo en cualquier punto de la trayectoria. Observa igualmente que el módulo de la aceleración normal o centrípeta también es igual en cualquier punto de la trayectoria.

$$|\vec{a}_n| = |\vec{a}_c| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \quad o \quad simplemente \quad a_n = a_c = \frac{v^2}{R}$$

Como el módulo de la velocidad es constante, el tiempo que emplea la partícula en describir una vuelta completa siempre es el mismo. A este tiempo se llama ***periodo*** del MCU y se representa por la letra T y en el SI de unidades se mide en s.

En un MCU se denomina ***frecuencia*** al nº de vueltas descritas por unidad de tiempo. Se representa por la letra f, coincide con la inversa del periodo y en el SI de unidades se mide en vueltas/s = ciclos/s = rps (revoluciones/s). A esta unidad se denomina hercio (Hz).

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Se denomina velocidad angular al ángulo descrito por unidad de tiempo. Se representa por la letra ω, se calcula dividiendo el ángulo descrito entre el tiempo empleado en describirlo y en el SI de unidades se mide en rad/s.

$$\boxed{\omega = \frac{ángulo \ \ descrito}{tiempo \ \ empleado} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

La relación que existe entre los módulos de la velocidad lineal v y de la velocidad angular ω es: $\boxed{v = \omega . R}$ siendo R el radio de la trayectoria circular.

EJEMPLO 6º

La polea de un motor gira con m.c.u. a razón de 240 rpm (revoluciones por minuto). Hallar:

a) La frecuencia, a velocidad angular y el periodo.
b) La aceleración centrípeta del movimiento de la polea si su radio es de 20 cm.

SOLUC: a) 4 Hz 25,12 rad/s y 0,25 s b) 3155 m/s²

EJERCICIO 5º

Un tocadiscos gira a 33 rpm. Calcula:

a) La velocidad angular y el ángulo descrito a los 3 s.
b) Si el radio es de 10cm y una mosca se encuentra en el borde del disco calcula la velocidad lineal de la mosca.
c) La distancia recorrida por la mosca a los 3s.

SOLUC: a) 3,454 rad/s y 10,362 rad b) 0,34 m/s c) 1 m

EJERCICIO 6º

La velocidad angular de una rueda es de 6,28 rad/s. Hallar:

a) la frecuencia, el periodo.

b) La velocidad lineal (v) y la aceleración normal de un punto de la periferia de la rueda. El radio de giro es de 50 cm.

SOLUC: a) 2 Hz y 0,5 s b) 3,14 m/s y 19,72 m/s²

EJERCICIO 7º

Un ciclista recorre una trayectoria circular de 5 m de radio con una velocidad de 54 Km/h. Calcular:

a) La aceleración del ciclista.
b) La velocidad angular
c) El tiempo que tarda en completar cada vuelta

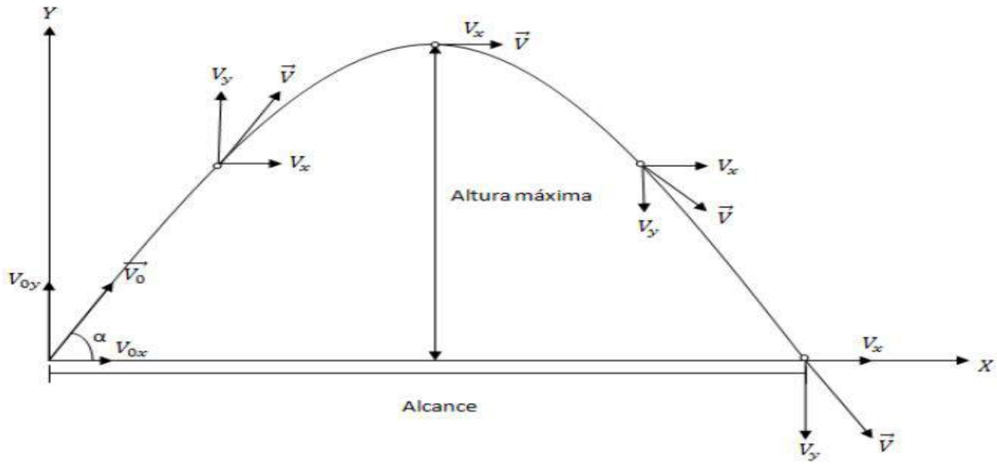
SOLUC: a) 45 m/s² b) 3 rad/s c) 2 s

9. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS: MOVIMIENTO PARABÓLICO

Se dice que una partícula describe un movimiento compuesto cuando la partícula se encuentra sometida a dos o más movimiento simultáneos. Un ejemplo de este fenómeno se produce cuando una barca en un río se ve sometida a dos movimientos simultáneos: el movimiento impulsado por el barquero al remar y el de arrastre de la corriente del agua del río.

Otro ejemplo de movimiento compuesto es el que tienen los cuerpos cuando son lanzados en la superficie de la tierra en una dirección distinta a la vertical. El cuerpo se ve sometido a dos movimientos: un MRU de avance en la dirección horizontal y un MRU de caída libre como consecuencia de la acción de la fuerza gravitatoria (de su propio peso). El resultado de estos dos movimientos es un movimiento parabólico.

En la siguiente figura se representa al vector velocidad y a sus componentes horizontal y vertical e diferentes puntos de la trayectoria para una partícula lanzada desde el origen de coordenadas:



$$\boxed{\vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0x}\,\vec{j}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{v_{0x} = |\vec{v}_0|\cos\alpha} \\ \boxed{v_{0y} = |\vec{v}_0|\,sen\,\alpha} \end{cases}$$

Siendo α el ángulo de lanzamiento.

Es importante destacar que en los lanzamientos horizontales el ángulo de lanzamiento es 0º.

Figura 1.5
Vector velocidad y sus componente en un movimiento parabólico

En la figura anterior puede observarse como la componente horizontal de la velocidad permanece constante (MRU) mientras que la componente vertical de la velocidad va variando, siendo positiva mientras el cuerpo asciende, haciéndose 0 en el punto más alto de la trayectoria y siendo negativa mientras desciende.

Las ecuaciones del movimiento ó posición y de la velocidad son las siguientes:

ECUACIONES DE LA POSICIÓN

$$\boxed{\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = x_0 + v_{0x}t = x + |\vec{v}_0|\cos\alpha.t} \\ \boxed{y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 = y_0 + |\vec{v}_0|\,sen\alpha.t - 5t^2} \end{cases}$$

ECUACIONES DE LA VELOCIDAD

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{v_x = v_{0x} = |\vec{v}_0|\cos\alpha} \\ \boxed{v_y = v_{0y} + gt = |\vec{v}_0|\,sen\alpha - 10t} \end{cases}$$

EJEMPLO 7º

Una persona lanza una pelota desde una plataforma situada a 1,7 m del suelo con una velocidad de 6 m/s y un ángulo de disparo de 53º. Calcular:

a) Las ecuaciones de la posición y de la velocidad.
b) El tiempo de vuelo.
c) La velocidad con la que llega al suelo.
d) El alcance.
e) La altura máxima a la que llega la pelota.

EJERCICIO 8º

Un proyectil es lanzado desde un acantilado de 150 m de altura con una velocidad inicial de 400 m/s y un ángulo de inclinación de 30º. Calcular:

a) Las componentes de la velocidad inicial
b) El tiempo que tarde en caer al suelo.
c) El alcance.
d) La altura máxima alcanzada.

SOLUC: a) v_{0x} = 346,4 m/s v_{0y} = 200 m/s b) 41,5 s c) 14,4 km d) 2191 m

EJERCICIO 9º

Un chico lanza piedras horizontalmente desde lo alto de un acantilado de 25 m de altura. Si desea que choquen contra un islote que se encuentra a 30 m de la base del acantilado, calcula:

a) La velocidad con la que debe lanzar las piedras.

b) El tiempo que tardan las piedras en llegar al islote.

SOLUC: a) 13,3 m/s b) 2,2 s

10. MOMENTO LINEAL O CANTIDAD DE MOVIMIENTO

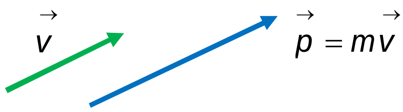
Se llama momento lineal o cantidad de movimiento de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$, al producto de la masa de su masa por su velocidad:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

COMENTARIOS:

1º.- Es una magnitud vectorial por que se obtiene del producto de un escalar, la masa, por un vector, la velocidad.

2º.- Tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad:



3º.- El módulo de la cantidad de movimiento es el producto de la masa por el módulo de la velocidad:

$$\boxed{|\vec{p}| = m\,|\vec{v}| \quad \text{ó} \quad simplemente \quad p = m.v}$$

4º.- En el sistema internacional de unidades se mide en kg.m/s.

11. LAS LEYES DE NEWTON

La Mecánica clásica se basa en tres leyes o principios que fueron enunciados por el científico inglés Isaac Newton (1642-1727). Estas tres leyes del movimiento se recogen en una de sus obras más importantes: el libro titulado “Principios matemáticos de la filosofía natural (1687)”.

Realmente podrían reducirse a sólo dos leyes, ya que la segunda incluye a la primera. Sin embargo así es como él las presentó, es más fácil para comprenderlas y además la primera realmente fue propuesta por Galileo Galilei (1564-1642) un gran hombre del renacimiento nacido en Pisa.

11.1 PRIMERA LEY DE NEWTON, PRIMER PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PRINCIPIO DE INERCIA

“*Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza ó si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo vale cero, entonces la partícula estará en reposo o moviéndose con velocidad constante, es decir, con MRU.*”

COMENTARIOS

1º.- Según este principio, las fuerzas no son las causantes del movimiento de los cuerpo ya que, un cuerpo puede estar moviéndose con MRU y sin embargo la resultante de las fuerzas vale 0.

2º.- Este principio también dice que en ausencia de fuerzas los cuerpos carecen de aceleración, es decir, no cambian su velocidad, o sea, no cambian su estado de reposo o de movimiento inicial en el que estaban. Como la inercia se define como la resistencia u oposición que presenta un cuerpo a cambiar su estado de reposo o de movimiento, es por esta razón por la que también se denomina principio de inercia.

3º.- Cuando sobre un cuerpo no actúan fuerzas o la resultante de todas las que actúan vale 0 se dice que el cuerpo está en equilibrio. Por tanto, tanto un cuerpo en reposo como con MRU, se encuentran en equilibrio. En el primer caso se habla de equilibrio estático, mientras que en el segundo caso se habla de equilibrio dinámico.

4º.- El reposo y el MRU son dos situaciones equivalentes desde el punto de vista dinámico porque n ambos hay ausencia de fuerzas.

11.2 SEGUNDA LEY DE NEWTON, SEGUNDO PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA

"La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula coincide con el producto de su masa por su aceleración".

$$\boxed{\vec{F}_{RTE.} = m\,\vec{a}}$$

$$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = m\,\vec{a}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\,\vec{a}}$$

COMENTARIOS:

1º.- La primera Ley de Newton es un caso particular de la segunda:

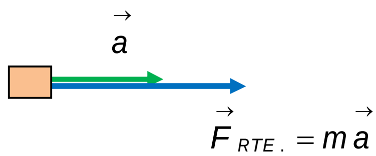
$$Si \quad \vec{F}_{RTE.} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{RTE.} = m\,\vec{a} = 0 \Rightarrow m\,\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = cte \Rightarrow reposo \quad ó \quad MRU$$

2º.- La unidad de fuerza es la unidad de masa por la unidad de aceleración que, en el SI de unidades, es kg.m/s^2. A esta unidad se le conoce con el nombre de Newton.

$$Kg\,\frac{m}{s^2} = NEWTON\ (N)$$

Un Newton es la fuerza que aplicada a un cuerpo de 1 Kg le proporciona una aceleración de 1 m/s^2.

3º.- La fuerza resultante que actúa sobre una partícula y la aceleración dicha partícula son vectores de la misma dirección y sentido ya que, la fuerza se obtiene del producto de un escalar positivo, la masa m, por un vector, la aceleración $\vec{a}$.



4º.- La ecuación $\vec{F}_{RTE.} = m\,\vec{a}$ es una ley física que nos dice que las fuerzas son las causantes de las aceleraciones de los cuerpos, es decir, las fuerzas son las causantes de los cambios en la velocidad de los cuerpos, o sea, de los cambios en el movimiento de los cuerpos. Por tanto, la expresión $\vec{F}_{RTE.} = m\,\vec{a}$ es una relación causa-efecto: la causa son las fuerzas y el efecto es la aceleración.

5º.- Esta Ley también nos permite interpretar físicamente a la masa, no como cantidad de materia, sino como una medida de la inercia de los cuerpos, es decir, como una medida de la resistencia u oposición que presentan los cuerpos a los cambios en su movimiento. En efecto, si aplicamos dos fuerzas iguales a dos cuerpos de diferente masa, la aceleración que adquiere cada uno de ellos sería:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}}{m} \quad y \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}}{M}$$

El cuerpo de menor masa presenta mayor aceleración, es decir, cambia más rápidamente su velocidad y, por tanto, presenta menor inercia. Al contrario que el de mayor masa.

11.3 TERCERA LEY DE NEWTON, TERCER PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PEINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN

"Si un cuerpo A ejerce una fuerza (acción) sobre otro cuerpo B, este ejerce sobre el A otra fuerza (reacción) igual pero de sentido contrario".

COMENTARIOS:

1º.- Este principio afirma que las fuerzas siempre aparecen por parejas, el par acción-reacción, y son fuerzas de la misma dirección, de igual módulo pero de sentido contrario.

2º.- Según el comentario anterior podría pensarse que el par de fuerzas acción-reacción se anula entre sí. Sin embargo esto no es cierto puesto que están aplicadas a cuerpos diferentes.

3º.- Las fuerzas de acción y reacción son simultáneas, es decir, no hay separación temporal entre ellas.

4º.- Este principio afirma que las fuerzas son siempre acciones mutuas entre cuerpos y, por esta razón, a las fuerzas también se les conoce con el nombre de interacciones.

12. LA FUERZA DE ROZAMIENTO

La fuerza de rozamiento es una fuerza que disipa energía en forma de calor. Suele decirse que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento. Aunque esto es cierto, no es menos cierto que también permite otros movimientos. En efecto, sin la fuerza de rozamiento no podríamos andar, ni escribir, las ruedas de los vehículos no podrían avanzar, etc.

La fuerza de rozamiento puede ser ***estática o dinámica***, también llamada ***cinética***. La fuerza de rozamiento estática es la que actúa mientras el cuerpo está en reposo sobre la superficie y puede tener valores comprendidos entre 0 y un valor máximo. Cuando la fuerza aplicada supera este valor máximo el cuerpo inicia el movimiento sobre la superficie y entonces aparece la fuerza de rozamiento dinámica o cinética.

El valor máximo de la fuerza de rozamiento estática vale:

$$\boxed{|\vec{F}|_{roz.est.máx.} = \mu_e \cdot |\vec{N}|} \quad \text{ó bien} \quad \boxed{F_{roz.est.máx.} = \mu_e . N}$$

Siendo:

μ_e una constante característica que sólo depende de la naturaleza de las superficies puestas en contacto y que se denomina *coeficiente de rozamiento estático.*

$\vec{N}$ es la fuerza normal con la que se aprietan ambas superficies.

El módulo de esta fuerza representa el valor mínimo que debe de tener una fuerza paralela a la superficie para que al aplicarla sobre el cuerpo en reposo, este inicie su movimiento.

El valor de la fuerza de rozamiento dinámica o cinética es:

$$\boxed{|\vec{F}|_{roz.din.} = |\vec{F}|_{roz.cin.} = \mu_d \cdot |\vec{N}| = \mu_c \cdot |\vec{N}|} \quad \text{ó bien} \quad \boxed{F_{roz.din.} = F_{roz.cin.} = \mu_d . N = \mu_c . N}$$

Siendo:

$\mu_e = \mu_c$ una constante característica que sólo depende de la naturaleza de las superficies puestas en contacto y que se denomina *coeficiente de rozamiento dinámico o cinético.*

$\vec{N}$ es la fuerza normal con la que se aprietan ambas superficies.

COMENTARIOS

1º.- Ambos coeficientes de rozamiento son adimensionales, es decir, carecen de unidades puesto que se obtienen dividiendo el módulo de dos fuerzas.

2º.- El coeficiente de rozamiento estático es ligeramente mayor que el dinámico ó cinético. Esto significa que se necesita aplicar más fuerza a un cuerpo en reposo para que inicie su movimiento que, una vez en movimiento, mantenga su velocidad constante:

$$\boxed{\mu_e > \mu_c \quad \Rightarrow \quad F_{roz.est.máx.} > F_{roz.cin.}}$$

3º.- Ambos coeficientes de rozamiento se pueden calcular experimentalmente del siguiente modo:

Para calcular el coeficiente de rozamiento estático entre un cuerpo y la superficie sobre la que se apoya se va elevando poco a poco la superficie hasta localizar el ángulo para el cual el cuerpo inicia su movimiento. Con esta inclinación se ha alcanzado el valor máximo de la fuerza de rozamiento estática que coincidirá con la componente paralela del peso y por tanto:

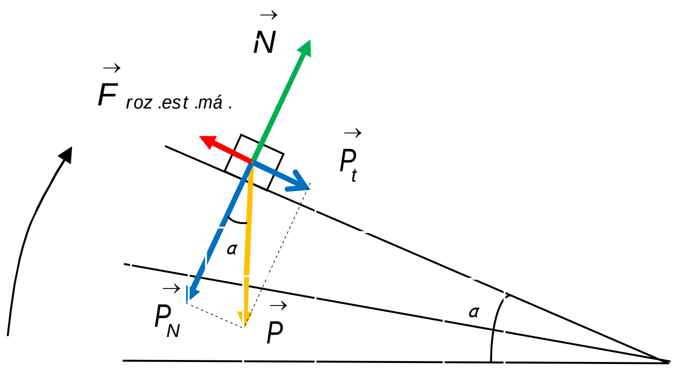
$$F_{roz.est.máx.} = P_t$$

$$\mu_e.N = P.sen\alpha$$

$$\mu_e.P_N = P.sen\alpha$$

$$\mu_e.P.\cos\alpha = P.sen\alpha$$

$$\boxed{\mu_e = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha}$$



Siendo α el ángulo para el cual el cuerpo inicia el deslizamiento por la superficie.

Con la inclinación anterior el cuerpo deslizará con movimiento acelerado ya que la fuerza de rozamiento dinámica, que es inferior a la de rozamiento estática máxima, será inferior a P_t. Si queremos que deslice con MRU debemos disminuir levemente la inclinación hasta conseguir el equilibrio entre la fuerza de rozamiento dinámica y P_t. Para esta nueva inclinación se cumplirá:

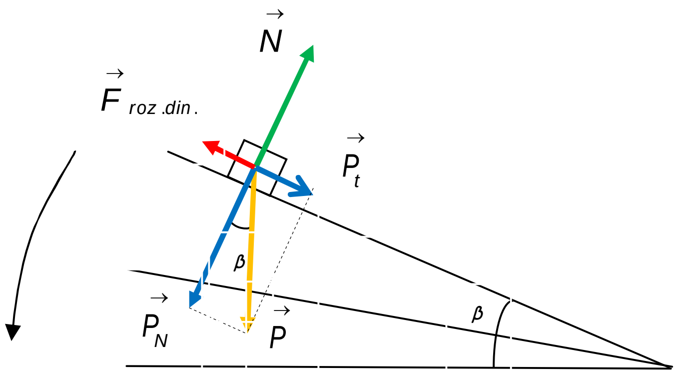
$$F_{roz.din.} = P_t$$

$$\mu_c.N = P.sen\beta$$

$$\mu_c.P_N = P.sen\beta$$

$$\mu_c.P.\cos\beta = P.sen\beta$$

$$\boxed{\mu_c = \frac{sen\beta}{\cos\beta} = tg\beta}$$



Siendo β el ángulo de inclinación para el cual el cuerpo desliza con velocidad constante (MRU).

EJEMPLO 8º

Considera uno cualesquiera de los objetos que en este momento tienes encima de la mesa (un cuerpo en reposo apoyado sobre una superficie horizontal). Analiza las fuerzas que actúan sobre él.

EJEMPLO 9º

Considera el mismo cuerpo del ejemplo anterior pero ahora le aplicas una fuerza $\vec{F}$ horizontal. Analiza las fuerzas que actúan sobre él y si se moverá o no en los siguientes casos:

a) Si no existiese rozamiento entre el cuerpo y la superficie de la mesa.
b) Considerando la situación real.

EJEMPLO 10º

Haz lo mismo que en el ejemplo anterior suponiendo que la fuerza $\vec{F}$ que se aplica forma un ángulo α con la horizontal.

EJERCICIO 10º

Sobre un cuerpo de 20 Kg, apoyado en una superficie horizontal con rozamiento (μ_c = 0,25), se aplica una fuerza horizontal de 100 N. Calcular:

a) La fuerza de rozamiento que actúa.
b) La aceleración con la que se mueve el cuerpo.
c) La velocidad del cuerpo al cabo de 3 s si inicialmente estaba en reposo.

SOLUC: a) 49 N b) 2,5 m/s^2 c) 7,5 m/s

EJERCICIO 11º

Se aplica una fuerza de 50 N a un cuerpo de 8 Kg que está apoyado, en reposo, en una superficie horizontal. La fuerza forma un ángulo de 60º con la horizontal y el coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo y la superficie vale 0,1. Calcula la aceleración con la que se mueve el cuerpo.

SOLUC: 2,7 m/s^2

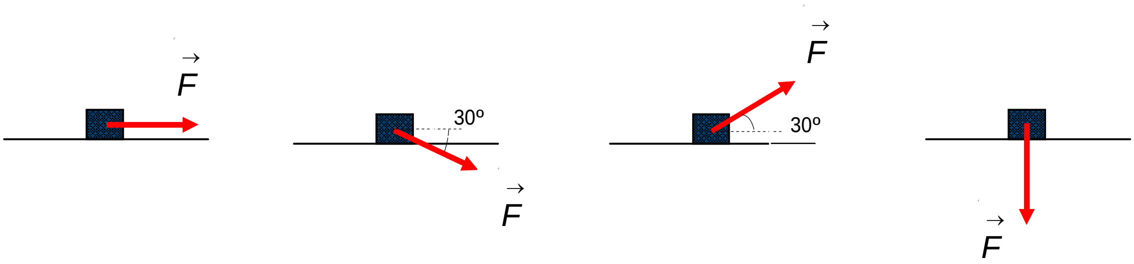
EJEMPLO 11º

Se deposita a un cuerpo de masa m sobre un plano inclinado de ángulo de inclinación α y comienza a deslizar. Analiza las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y comprueba que la aceleración de descenso es independiente de la masa del cuerpo, en los siguientes casos:

a) No hay rozamiento.
b) Sí hay rozamiento

EJEMPLO 12º

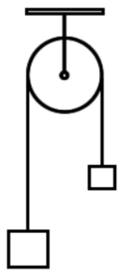
Sobre un cuerpo de 5 Kg de masa, inicialmente en reposo, actúa una fuerza $\vec{F}$, cuyo módulo es 10 N. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y la superficie vale 0,4, calcula el valor de la fuerza de rozamiento que actúa y su valor máximo en cada una de las situaciones dibujadas:



SOUC: a) 10 N; 19,6 N b) 8,7 N; 21,6 N c) 8,7 N; 17,6 N d) 0 N; 23,6 N

EJEMPLO 13º

Dos masas están enlazadas mediante una cuerda que pasa por la garganta de una polea (máquina de Atwood). Analiza las fuerzas que actúan sobre cada masa.



EJERCICIO 12º

Se deja caer un cuerpo de 20 Kg. por un plano inclinado 30º con respecto a la horizontal desde 2 m de altura, siendo el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y el plano es $\mu_d = 0,4$.

a) Calcula la aceleración con que desciende.

b) La velocidad con la que llega a la base del plano.

SOLUC: A) 1,5 m/s^2 B) 3,46 m/s

EJERCICIO 13º

Se observa que un cuerpo desliza con velocidad constante por un plano inclinado. Basándote en el primer principio de la Dinámica razona si hay o no rozamiento entre el cuerpo y la superficie.

EJERCICIO 14º

Un cuerpo de 15 kg. se deja caer por un plano inclinado de 60º respeto a la horizontal, desde una altura de 2 m. Hallar:

a) La aceleración de descenso si no hay rozamiento entre el cuerpo y el plano.

b) El tiempo que tarda el cuerpo en llegar a la base del plano y la velocidad que tendrá en ese momento si partió del reposo.

SOLUC: A) a = 8,5 m/s^2 B) 0,73 s y 6,2 m/s

EJERCICIO 15º

Desde la base de un plano inclinado se lanza hacia arriba a un cuerpo de masa m. Demuestra que la aceleración de ascenso es independiente de la masa tanto si hay rozamiento como si no lo hay.

EJERCICIO 16º

Desde la base de un plano inclinado de 30º se lanza hacia arriba a un cuerpo de masa m con una velocidad de 12 m/s. Calcula la aceleración de ascenso, el tiempo que está ascendiendo y la altura máxima alcanzada en los siguientes casos:

a) No hay rozamiento.
b) El coeficiente de rozamiento dinámico vale 0,18.

SOLUC: a) a = -4,9 m/s^2 t = 2,45 s h = 7,35 m b) a = -6,43 m/s^2 t = 1,87 s h = 5,62 m

EJERCICIO 17º

Aplicamos horizontalmente una fuerza $\vec{F}$ a un mueble de 60 Kg. de masa, que está en reposo sobre una superficie horizontal con rozamiento siendo los coeficientes de rozamiento: $\mu_e = 0.4$ y $\mu_c = 0.3$.

Determina si se moverá o permanecerá en reposo y calcula la fuerza de rozamiento que está actuando en cada uno de los siguientes casos:

A) $\vec{F} = 200$ N B) $\vec{F} = 250$ N

SOLUC: A) no se mueve; $F_{roz} = 200$ N B) si se mueve; $F_{roz} = 176,4$ N

EJERCICIO 18º

Se quiere determinar el coeficiente de rozamiento estático y cinético entre una caja y tablón. Al elevar poco a poco el tablón se observa que la caja comienza a deslizar cuando la inclinación es de 28º. En estas mismas condiciones la caja recorre 3 m en 3 s. Calcula ambos coeficientes.

SOLUC: $\mu_e = 0{,}53$ $\mu_c = 0{,}455$

EJERCICIO 19º

Un esquiador, al descender, partiendo del reposo, por una pendiente de 213 m de longitud y un desnivel del 3%, emplea un tiempo de 61 s. Si se cambia de esquíes, el mismo esquiador invierte un tiempo de 42 s. Determina el coeficiente de rozamiento entre la nieve y los esquíes, en cada caso.

SOLUC: $\mu_{c1} = 0018$ $\mu_{c2} = 0{,}005$

EJERCICIO 20º

Un cuerpo desliza libremente por un plano inclinado de 30º con velocidad constante. Una vez en la base del plano, se lanza hacia arriba con una velocidad de 10 m/s.

a) Calcula el tiempo que tardará en detenerse y la altura a la que lo hará.
b) Una vez se detenga, ¿volverá a deslizar hacia abajo por sí mismo? Razona la respuesta.

SOLUC: a) 1,02 s 2,55 m b) ¿?

EJERCICIO 21º

Se desea subir un cuerpo de 5 Kg. por un plano inclinado 30º con respecto a la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento cinético es 0,4, calcula:

a) La fuerza paralela al plano que tenemos que aplicarle para que suba con una aceleración de 0,5 m/s^2.
b) La altura alcanzada por el cuerpo a los 2 s suponiendo que partió del reposo.

SOLUC: a) 44,05 N b) 0,5 m

EJERCICIO 22º

Dos masas de 1 y 3 Kg cuelgan de los extremos de una cuerda que pasa por una polea . Despreciando la masa de la cuerda y de la polea, calcular:

a) La aceleración del sistema.
b) La tensión de la cuerda.

SOLUC: a) $a = 4{,}9\ m/s^2$ b) $T = 14{,}7\ N$

EJERCICIO 23º

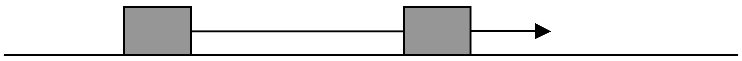
Un cuerpo de 6 Kg. de masa resbala sobre una mesa horizontal, (cuyo coeficiente de rozamiento es 0,25), resbala por la acción de una cuerda a la que está unido, esta cuerda pasa por la garganta de una polea a otro cuerpo de 4 Kg. que cuelga.Calcular:

a) la aceleración con que resbala la masa que está sobre la mesa.
b) La tensión de la cuerda en cada uno de los extremos de la cuerda.

SOLUC: a) 2,45 m/s^2 b) 29,4 N

EJERCICIO 24º

Dos cuerpos de 4 y 6 kg. están apoyados sobre una superficie horizontal sin rozamiento y unidos mediante una cuerda de masa despreciable e inextensible. Del cuerpo de la derecha se tira con una fuerza F horizontal de 20 N hacia la derecha. Calcular:



a) La aceleración del sistema.
b) La tensión de la cuerda.

SOLUC: A) a = 2 m/s^2 B) T = 8 N

EJERCICIO 25º

Repite el problema anterior suponiendo que la fuerza F se aplica formando un ángulo de 30º con la horizontal.

SOLUC: A) a = 1,74 m/s^2 B) T = 6,96 N

EJERCICIO 26º

Repite el problema nº 24 suponiendo que hay rozamiento siendo $\mu_1 = 0,1$ y $\mu_2 = 0,15$.

SOLUC: A) a = 0,73 m/s^2 B) T = 6,84 N

EJERCICIO 27º

Repite el problema nº 26 suponiendo que hay rozamiento siendo $\mu_1 = 0,1$ y $\mu_2 = 0,15$.

SOLUC: A) a = 0,62 m/s^2 B) T = 6,4 N

13. FUERZA CENTRÍPETA

Un cuerpo con movimiento curvilíneo siempre tiene aceleración centrípeta ya que la dirección de su velocidad va cambiando continuamente.

El cuerpo por tanto no está en equilibrio y debe de actuar sobre él una fuerza responsable de dicha aceleración que ha de tener la misma dirección y sentido que la aceleración centrípeta, es decir, dirigida hacia el centro de la trayectoria. A esta fuerza responsable de la aceleración centrípeta de los cuerpos se le denomina fuerza centrípeta.

En la gráfica siguiente se muestra la fuerza centrípeta en un MCU:

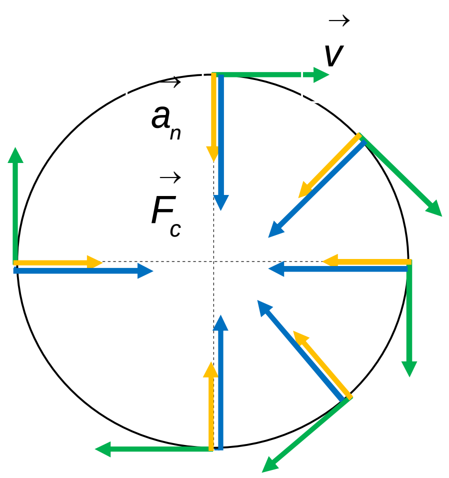


Figura 1.6
Vectores velocidad lineal, aceleración normal y fuerza centrípeta en un MCU

COMENTARIOS:

1º.- La fuerza centrípeta es sólo un nombre, no es una fuerza más que añadir al movimiento.

2º.- La fuerza centrípeta puede ser de muy diferente naturaleza: gravitatoria, eléctrica, de rozamiento, tensión, etc.

3º.- El módulo de la fuerza centrípeta, aplicando la 2ª Ley de Newton es:

$$\vec{F}_c = m.\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_c = m.a_c = m.\frac{v^2}{R}}$$