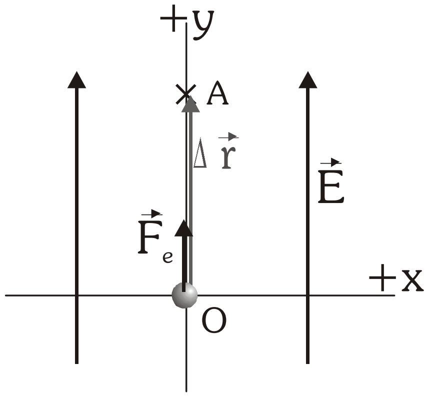
ALGUNOS PROBLEMAS Y CUESTIONES TEÓRICAS DEL TEMA 3. INTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA

Problema 11 del boletín.

11. Una partícula de carga 6 ·10^{-6} C se encuentra en reposo en el punto (0,0). Se aplica un campo eléctrico uniforme de 500 NC^{-1}, dirigido en el sentido positivo del eje OY.
a) Describa la trayectoria seguida por la partícula hasta el instante en que se encuentra en el punto A, situado a 2 m del origen. ¿aumenta o disminuye la energía potencial de la partícula en dicho desplazamiento? , ¿en qué se convierte dicha variación de energía?
b) Calcule el trabajo realizado por el campo en el desplazamiento de la partícula y la diferencia de potencial entre el origen y el punto A.

a)
Nos encontramos ante una partícula dentro de un campo electrostático uniforme.
La partícula sufrirá una fuerza eléctrica debido a la acción del campo electrostático. Dicha fuerza viene dada por $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$, y la aceleración que sufre, aplicando la segunda ley de Newton: $\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}_e}{m} = \frac{q \cdot \vec{E}}{m} = cte$
La aceleración es constante, y como tanto q como m son positivas, va en la misma dirección y sentido que el campo.
Como la aceleración es constante, la partícula sigue un movimiento uniformemente acelerado. La trayectoria será recta, ya que parte del reposo. La velocidad será siempre paralela a la aceleración (y al campo eléctrico).



La energía potencial electrostática está relacionada con la fuerza electrostática mediante la relación $\Delta Ep_e = -W_{Fe}$. En este caso el trabajo realizado por la fuerza electrostática es positivo, ya que va a favor del desplazamiento. Así, la variación de energía potencial será negativa, con lo que Ep_e disminuirá.

Ya que la fuerza electrostática es conservativa, se cumple que $\Delta Ec = -\Delta Ep_e$ La disminución de energía potencial se traduce en un aumento de energía cinética.
(También puede razonarse aplicando el teorema de las fuerzas vivas $\Delta Ec = W_{TOT}$)

b) Datos: $\vec{E} = 500\ \vec{j}\ \frac{N}{C}$; $\Delta\vec{r} = 2\ \vec{j}\ m$; $q = 6 \cdot 10^{-6}\ C$

La fuerza electrostática que sufre la partícula es constante ($\vec{F}_e = q \cdot \vec{E} = cte$). En ese caso, podemos calcular el trabajo realizado mediante la expresión $W_{Fe} = \vec{F}_e \cdot \Delta\vec{r} = q \cdot \vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = 6 \cdot 10^{-6} C \cdot 500\ \vec{j}\ \frac{N}{C} \cdot 2\ \vec{j}\ m = 6 \cdot 10^{-3}\ J$

La diferencia de potencial la calculamos a partir de la variación de energía potencial:

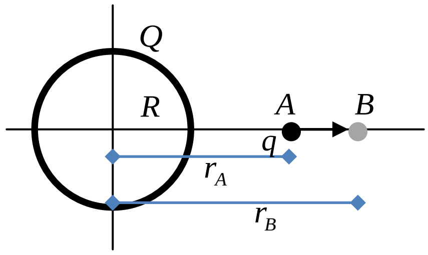
$$\Delta V = \frac{\Delta Ep_e}{q} = \frac{-W_{Fe}}{q} = \frac{-6 \cdot 10^{-3}\ J}{6 \cdot 10^{-6}\ C} = -1000\ V$$

(Calculado de otra forma: $\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = -500\ \vec{j}\ \frac{N}{C} \cdot 2\ \vec{j}\ m = -1000\ V$)

$V_A - V_O$ = -1000 V → $V_O - V_A$ = 1000 V

15.- Una carga de 4 μC está distribuida uniformemente sobre una superficie esférica de 10 cm de radio. Calcular:

a) Trabajo necesario para alejar radialmente una carga de -3 μC desde un punto situado a 10 cm de la superficie esférica, una distancia de 5 cm.



Tenemos una esfera cargada que genera un campo electrostático en su exterior. Podemos usar entonces las expresiones válidas para cargas puntuales, suponiendo que toda la carga estuviera concentrada en su centro.
Sobre la carga q actúa la fuerza electrostática, que es conservativa. Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza electrostática en el desplazamiento viene dado por

$$W_{Fe} = -\Delta Ep_e = -(Ep_B - Ep_A) = Ep_A - Ep_B = \frac{K \cdot Q \cdot q}{r_A} - \frac{K \cdot Q \cdot q}{r_B}$$

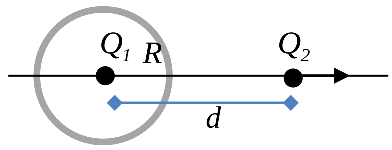
Sustituyendo ($Q = 4 \cdot 10^{-6}$ C, $q = -3 \cdot 10^{-6}$ C, $r_A = 0{,}2$ m , $r_B = 0{,}25$ m)

$W_{Fe} = -0{,}54 - (-432) = -0{,}108$ J

Obtenemos un trabajo negativo, ya que la fuerza electrostática se opone el desplazamiento. Por lo tanto, debemos realizar un trabajo exterior en contra de, por lo menos, el mismo valor. Así

$Wext = -W_{Fe} = 0{,}108$ J

b) En qué puntos sería nulo el campo si colocamos una carga puntual de 6 μC a 20 cm de distancia de la superficie esférica?



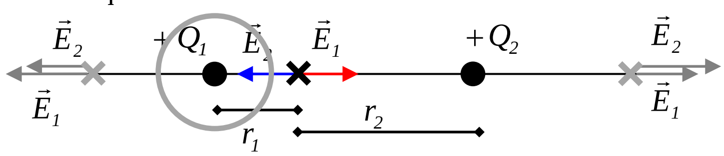
Para resolver este apartado consideramos que toda la carga de la esfera está concentrada en su centro.
$Q_1 = 4 \cdot 10^{-6}$ C , $Q_2 = 6 \cdot 10^{-6}$ C , $d = 0{,}3$ m

Aplicando el principio de superposición, el campo eléctrico total en cada punto del espacio será igual a la suma de los campos electrostáticos producidos por cada una de las cargas. Si establecemos la condición de que el campo total sea nulo, llegamos a la conclusión de que ambos campos deben ser igaules en módulo y dirección, pero en sentido contrario. Es decir:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \rightarrow \vec{E}_1 = -\vec{E}_2 \rightarrow Módulo\ E_1 = E_2 \rightarrow \frac{K \cdot |q_1|}{r_1^2} = \frac{K \cdot |q_2|}{r_2^2} \rightarrow \frac{4 \cdot 10^{-6}}{r_1^2} = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{r_2^2} \rightarrow r_2 = 1{,}225 \cdot r_1$$

Con lo que vemos que el punto en que ambos módulos sean iguales debe estar más cerca de la carga de menor valor absoluto. En este caso, el punto estará más cerca del centro de la esfera, ya que su carga es de sólo 4 μC.

Para que ambas fuerzas tengan la misma dirección, el punto debe estar en la línea que une a las cargas 1 y 2.
Dado que ambas cargas son de distinto signo, el punto en que ambas fuerzas tienen sentido contrario se encuentra en la zona entre las dos cargas, y como ya hemos comentado, más cerca de la carga de menor valor absoluto (la 1, en este caso) como puede observarse en el esquema.



$\Sigma\vec{E} \neq 0$ $\quad$ $\Sigma\vec{E} = 0$ $\quad$ $\Sigma\vec{E} \neq 0$

Tenemos entonces que la suma de las distancias r_1 y r_2 debe ser igual a la distancia entre las dos cargas, d = 0,3 m.
Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} r_1 + r_2 = 0{,}3\ m \\ r_2 = 1{,}225\ r_1 \end{array}\right\} \qquad r_1 = 0{,}135\ m,\ \ r_2 = 0{,}165\ m$$

16. Calcular la energía del electrón de un átomo de hidrógeno en su estado fundamental (según el modelo de Böhr) (m_e = 9,1 ·10^{-31} kg, r = a_0 = 0,53 Å)

Según el modelo de Böhr el átomo de hidrógeno, en su estado fundamental, consiste en un núcleo formado por un protón (Q = e = 1,6 ·10^{-19} C), y un electrón (q = - e = - 1,6 ·10^{-19} C) describiendo una órbita circular a una distancia r = a_0 = 0,53 Å = 0,53 ·10^{-10} m.

La energía mecánica del electrón vendrá dada por la suma de sus energías

Cinética, debida al movimiento $Ec = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

y potencial electrostática, debida a la atracción del núcleo $Ep_e = \frac{K \cdot Q \cdot q}{r}$ *(nivel cero de Epe para r →∞)*

La velocidad la calculamos teniendo en cuenta que el movimiento es circular uniforme y aplicando la segunda ley de Newton (en módulo) $\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad F_e = m \cdot a_n \quad \rightarrow \quad \frac{K \cdot |Q \cdot q|}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{K \cdot |Q \cdot q|}{r \cdot m}$

Así, la energía cinética queda $Ec = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{K \cdot |Q \cdot q|}{r \cdot m} = \frac{K \cdot |Q \cdot q|}{2r}$

Sustituyendo $Q = e, \; q = -e, \; r = a_0$

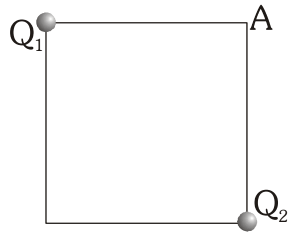
$$Ec = \frac{K \cdot e^2}{2a_0} \qquad\qquad Ep_e = -\frac{K \cdot e^2}{a_0}$$

La energía mecánica total queda

$$E_M = Ec + Ep_e = \frac{K \cdot e^2}{2a_0} - \frac{K \cdot e^2}{a_0} = -\frac{K \cdot e^2}{2a_0} = -2{,}17 \cdot 10^{-18}\ J = -13{,}6\ eV$$

(1 electrón-voltio = 1 eV = 1,6 ·10^{-19} J)

OTROS:



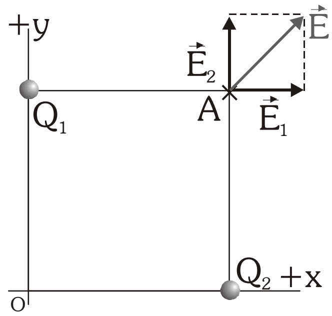
Dos cargas puntuales de 2 μC se encuentran situadas en vértices opuestos de un cuadrado de 1 m de lado. Calcule la intensidad del campo electrostático:

a) En el vértice A.

b) En el centro del cuadrado.

c) Calcule el trabajo necesario para trasladar una carga de – 2 μ C desde el vértice A hasta el centro del cuadrado.

a) Intensidad de campo electrostático ($\vec{E}$): Fuerza electrostática que se ejerce por unidad de carga sobre un cuerpo situado en un punto del campo electrostático. El campo creado por una carga puntual se calcula con la expresión:



$\vec{E} = -\frac{KQ}{r^2} \cdot \vec{u}_r$ El campo producido por una carga positiva lleva dirección radial y sentido hacia fuera de la carga que lo produce.

En el punto A influyen las dos cargas puntuales, por lo que aplicamos el principio de superposición. $\vec{E}_A = \vec{E}_{1A} + \vec{E}_{2A}$

Campo producido por la carga 1: Calculamos su módulo. La dirección y sentido, en el esquema:

$Q_1 = 2{\cdot}10^{6}\, C \quad r_1 = 1\, m \qquad E_1 = \frac{K|Q_1|}{r_1^2} = 18000\ \frac{N}{C}$ Por tanto: $\vec{E}_1 = 18000\, \vec{i}\ \frac{N}{C}$

Del mismo modo calculamos el campo producido por la carga 2 en A. su módulo es el mismo, ya que tanto la carga como la distancia tienen el mismo valor. Sólo cambia la dirección:

$\vec{E}_2 = 18000\ \vec{j}\ \frac{N}{C}$

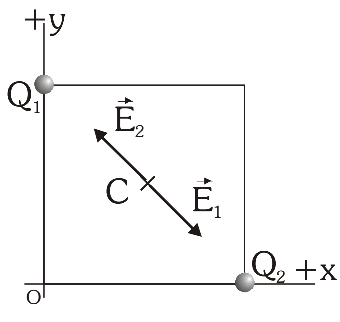
Campo en el punto A: $\vec{E}_A = \vec{E}_{1A} + \vec{E}_{2A} = 18000\, \vec{i} + 18000\ \vec{j}\ \frac{N}{C}$

Para calcular el potencial (energía potencial electrostática almacenada por unidad de masa), aplicamos también el principio de superposición:

$V_A = V_{1A} + V_{2A}$ Escogiendo el nivel cero de potencial en el infinito

$$V_A = \frac{KQ_1}{r_1} + \frac{KQ_2}{r_2} = 36000\ V$$

b) Este apartado se resuelve aplicando los conceptos ya explicados en el apartado anterior (campo electrostático, potencial electrostático, principio de superposición. Sólo varía la posición del punto a estudiar.



La distancia desde el pto C hasta ambas cargas es la misma: la mitad de la diagonal, es decir, $r_1 = r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} m$. como las cargas 1 y 2 son iguales, ambos campos serán iguales en módulo. $E_{1C} = E_{2C}$

En el esquema vemos que los campos producidos llevan igual dirección y sentidos opuestos: $\vec{E}_{1C} = -\vec{E}_{2C}$

Por lo tanto, aplicando el principio de superposición, el campo total será nulo. $\vec{E}_C = \vec{E}_{1C} + \vec{E}_{2C} = 0$

El potencial electrostático V, sin embargo, no se anula en el centro.

$V_C = V_{1C} + V_{2C} \qquad V_C = \frac{KQ_1}{r_1} + \frac{KQ_2}{r_2} = 50919\ V$

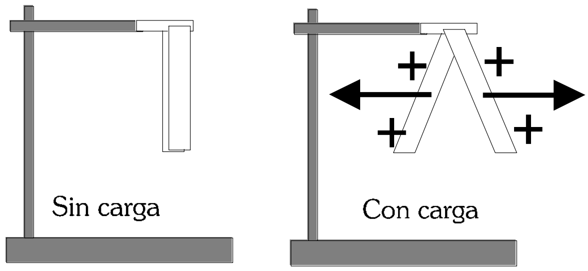
c) La fuerza electrostática es una fuerza conservativa, por lo que el trabajo que realiza en el desplazamiento puede calcularse a partir de

$$W_{Fe} = -\Delta Epe = -(Epe_C - Epe_A) = Epe_A - Epe_C = q \cdot V_A - q \cdot V_C = q \cdot (V_A - V_C) = 0{,}03\ J$$

El trabajo realizado por la fuerza electrostática es positivo, es decir, favorece el desplazamiento, por lo que no habrá que realizar ningún trabajo exterior para efectuar este desplazamiento.

CUESTIONES TEÓRICAS

1. a) Si un electroscopio cargado se toca con los dedos o con una varilla de metal, las láminas vuelven a juntarse. ¿Por qué?
a) Sin embargo, si esto mismo se hace con un plástico o con un trozo de madera, las láminas del electroscopio cargado no cambian de posición, ¿por qué?
b) Si la placa de un electroscopio cargado se toca brevemente con la de otro no cargado, las hojas del primero descienden un poco, mientras que las del segundo se elevan. Justifica este hecho.



Un electroscopio consiste básicamente en dos pequeñas láminas metálicas, en contacto por un extremo o suspendidas de un alambre. Al acercar a las placas un objeto electrizado, ambas placas se cargan con cargas del mismo signo (el signo será el mismo que el del objeto si se pone en contacto, y será de signo contrario al del objeto si sólo lo hemos acercado, cargándose entonces por inducción).

Al tener ambas placas cargas del mismo signo, la repulsión electrostática hará que éstas se separen, debido al poco peso de las láminas. El ángulo de separación depende de la carga eléctrica que adquieran las láminas, por lo que si colocamos una escala que mida dicho ángulo, tendremos un electrómetro, que mide la carga eléctrica.

a) Al tocar el electroscopio cargado con los dedos o con una varilla de metal (ambos conductores, aunque el cuerpo humano sea mucho menos que el metal), hacemos que la carga almacenada en las láminas pase al metal o a nuestro cuerpo (y de ahí a tierra, si existe contacto con el suelo). Las láminas se descargan (o se quedan muy débilmente cargadas), la repulsión electrostática desaparece (o disminuye en gran medida) y la gravedad hace que las láminas vuelvan a juntarse.
b) El plástico y la madera son aislantes, no permiten la libre circulación de electrones a través de ellos. Por lo tanto, las láminas no perderán la carga que tienen almacenada, y la repulsión electrostática mantendrá separadas las láminas.
c) Al tocar las placas de un electroscopio cargado con las de otro descargado, la carga eléctrica almacenada en el primero se reparte entre las cuatro láminas. La carga del primer electroscopio se reduce, con lo que la fuerza electrostática de repulsión es menor y también lo será el ángulo de separación.
Las placas del segundo electroscopio se separan porque pasa a almacenar carga, como se explicó al principio.

2. Analogías y diferencias entre las interacciones electrostática y gravitatoria.

<u>Analogías</u>:

- Ambas interacciones se explican mediante leyes empíricas que tienen forma similar. Son proporcionales a la magnitud que produce la interacción (masa o carga), e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que separa ambos cuerpos (se dice que son de tipo *Newtoniano*).

$$\vec{F} = cte \cdot \frac{X \cdot x}{r^2} \cdot \vec{u_r} \qquad \vec{F_g} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u_r} \qquad \vec{F_e} = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{u_r}$$

- El hecho de que la expresión de la fuerza sea muy similar en ambas interacciones, hace que la intensidad de campo, el potencial y la energía potencial tengan también expresiones muy parecidas.
- Ambas son interacciones centrales. Las líneas de campo convergen en un punto, donde está situada la masa o carga que crea el campo.
- Ambas tienen alcance infinito, disminuyendo su intensidad con el cuadrado de la distancia que separa los cuerpos.
- Ambas son interacciones conservativas (mantienen constante la energía mecánica). Eso hace que para ambas interacciones puedan definirse funciones potenciales asociadas (potencial, energía potencial) que simplifican el cálculo del trabajo realizado en los desplazamientos.

<u>Diferencias:</u>

La principal diferencia estriba en la magnitud que genera el campo. El campo gravitatorio es producido por la masa, que es siempre positiva. La carga eléctrica, causa del campo gravitatorio, puede ser positiva o negativa. Esto trae como consecuencias:

- La interacción gravitatoria siempre es atractiva, mientras que la electrostática puede ser atractiva o repulsiva, dependiendo del signo de las cargas.
- El campo gravitatorio sólo tiene sumideros de líneas de campo (las masas), mientras que el campo electrostático puede tener tanto sumideros (cargas -) como fuentes de campo (cargas +).
- Como consecuencia de las dos características anteriores: la interacción electrostática entre dos cargas puede sufrir *apantallamiento* por parte otras cargas eléctricas que se encuentren entre ellas. Esto no sucede con la interacción gravitatoria.
- Existen cuerpos neutros (con igual nº de cargas + y -) que no se ven afectados por la interacción electrostática. Sin embargo, todos los cuerpos tienen masa, y se ven afectados por la interacción gravitatoria (se dice que es universal).

Otra diferencia estriba en su intensidad, marcada por la constante (-G en el campo gravitatorio y K en el campo eléctrico). Consecuencias:

- La interacción electrostática es muchos órdenes de magnitud mayor que la gravitatoria. ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 ; por comparación, K en el vacío es $9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2)
- G es una constante universal, pero K depende del medio que rodee a las cargas. Esto hace que la interacción gravitatoria sea independiente del medio, mientras que la electrostática sí depende del medio.

3. Comente la siguiente frase: *"El trabajo necesario para transportar una carga eléctrica de un punto a otro que se encuentran a distinto potencial eléctrico, es nulo"*.

Recordemos que el trabajo realizado por una fuerza (en este caso la fuerza eléctrica) que actúa sobre un cuerpo durante un desplazamiento entre dos puntos venía dado por la expresión $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$

También hemos de tener en cuenta que la fuerza electrostática es conservativa, es decir, que el trabajo realizado sólo depende de los puntos inicial y final, no del camino recorrido entre ambos puntos. Esto hace que el trabajo puede calcularse como la diferencia entre dos valores de una función asociada, denominada energía potencial $W_{Fe} = -\Delta Ep_e = -q \cdot \Delta V$, ya que $Ep_e = q \cdot V$, siendo V el potencial eléctrostático (energía almacenada por unidad de carga colocada en el interior del campo electrostático).

En el enunciado nos dicen que ambos puntos están a distinto potencial eléctrico, con lo que $\Delta V \neq 0$. Como $q \neq 0$, vemos que el trabajo no puede ser nulo en ningún caso. La afirmación es falsa.

4. a) Razonar si la Energía potencial electrostática de una carga q aumenta o disminuye, al pasar del pto A al pto B, siendo el potencial en A mayor que en B.

b) El punto A está más alejado que el B de la carga Q que crea el campo. Razonar si la carga Q es positiva o negativa (emplear también la información del apartado a).

a) La energía potencial electrostática (Ep_e) almacenada por una partícula puntual cargada q, en el interior del campo eletrostático creado por una carga puntual Q, viene dada por la expresión $Ep_e = q \cdot V$, donde V es el potencial creado por la carga Q en el punto en el que se encuentra q.

La energía potencial en A será $Ep_{eA} = q \cdot V_A$

Del mismo modo, la energía potencial en B será $Ep_{eB} = q \cdot V_B$

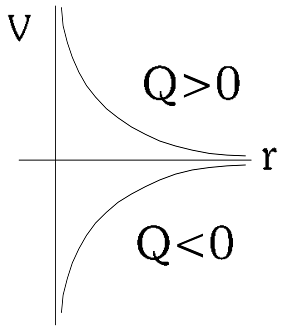
Como nos dicen que $V_A > V_B$, vemos que el hecho de que la energía puede aumentar o disminuir al pasar de A a B, dependiendo del signo de la carga *q*. De hecho:

- Si $q < 0$, $Ep_{eA} < Ep_{eB}$ La energía potencial aumenta al pasar de A a B.

- Si $q > 0$, $Ep_{eA} > Ep_{eB}$ La energía potencial disminuye al pasar de A a B.

b) Para resolver esta cuestión nos centramos en las características del potencial electrostático creado por una carga Q puntual.

$V = \dfrac{K \cdot Q}{r}$, donde, *r* es la distancia a la que se encuentra el punto estudiado, y *K* es la constante electrostática del medio (para el vacío $K_0 = 9 \cdot 10^9$ Nm²/C²).



En el punto A $V_A = \dfrac{K \cdot Q}{r_A}$ En el punto B $V_B = \dfrac{K \cdot Q}{r_B}$

Como nos dicen que $r_A > r_B$ y que $V_A > V_B$, la única forma de ambas cosas ocurran simultáneamente es que Q sea una carga negativa. Puede verse más claramente en la gráfica adjunta. Cuando $Q < 0$, vemos que los puntos más cercanos tienen menor potencial (más negativo). Si la carga fuera positiva, ocurriría lo contrario, el potencial *V* disminuiría con la distancia.

5. En una región del espacio el potencial electrostático aumenta en el sentido positivo del eje Z y no cambia en las direcciones de los otros dos ejes.
a) Dibujar en un esquema las líneas del campo electrostático y las superficies equipotenciales.
b) ¿En qué dirección y sentido se moverá un electrón, inicialmente en reposo?

a) Recordemos los conceptos que están en juego en esta cuestión y la relación existente entre ellos:

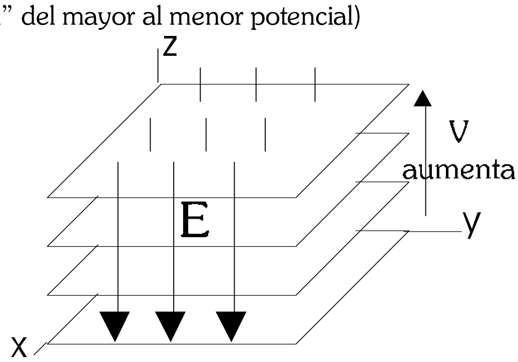
- Intensidad de campo electrostático ($\vec{E}$): fuerza por unidad de carga que sufre una partícula cargada situada en el interior del campo electrostático. Las líneas de campo indican la dirección y sentido que tiene $\vec{E}$ en cada punto del espacio.

- Potencial (*V*) : Energía por unidad de carga que almacena una partícula cargada en el interior del campo electrostático. Las superficies equipotenciales son aquellas en las que el valor del potencial es constante para todos sus puntos.

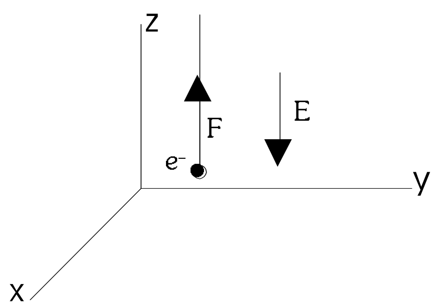
- Relación entre ambas magnitudes: $\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$ Y a la inversa, el campo eléctrico nos indica cómo varía el potencial. Concretamente, la dirección de $\vec{E}$ es aquella en la que el potencial electrostático varía más rápidamente.

Las líneas de campo electrostático son perpendiculares a las superficies equipotenciales, y su sentido es aquél en el que el potencial disminuye (decimos que las líneas de campo "van" del mayor al menor potencial)

En la cuestión que nos ocupa, el potencial varía en la dirección del eje Z, y se mantiene constante en las otras dos direcciones X e Y. Por tanto, las superficies equipotenciales son planos paralelos a OXY, como aparece en el dibujo. Las líneas de campo, al ser perpendiculares a estas superficies, deben ser rectas paralelas a OZ. Su sentido es tal que indica la disminución del potencial. Así que, si V aumenta en el sentido positivo del eje Z, el sentido del campo electrostático será el negativo del eje OZ.



b) Un electrón, como cualquier carga eléctrica *q* en el interior de un campo electrostático $\vec{E}$, sufrirá una fuerza dada por la expresión $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. En este caso, como la carga del electrón es negativa, el sentido de la fuerza será el contrario al del campo electrostático. $\vec{F}$ irá en el sentido positivo del eje OZ, y la aceleración que sufre el electrón también (2ª ley de Newton: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{q \cdot \vec{E}}{m}$) .



Como inicialmente la partícula estaba en reposo, el movimiento será rectilíneo uniformemente acelerado, en dirección del eje OZ y sentido positivo.