

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz X que verifica $A \cdot X + B = 2A$.

b) Calcula B^2 y B^{2016} .

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si multiplicamos los dos términos de la ecuación por A^{-1} a la izquierda, nos queda:

$$A \cdot X + B = 2A \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X + A^{-1} \cdot B = 2A^{-1} \cdot A \Rightarrow X = 2I - A^{-1} \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = 2I - A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 & 9 & 5 \\ -8 & 7 & 4 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos

$$B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$B^{2016} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A \cdot X + B^2 = B \cdot X + A^2$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X :

$$A \cdot X + B^2 = B \cdot X + A^2 \Rightarrow A \cdot X - B \cdot X = A^2 - B^2 \Rightarrow (A - B) \cdot X = A^2 - B^2 \Rightarrow X = (A - B)^{-1} \cdot (A^2 - B^2)$$

Calculamos la matriz inversa de $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A - B)^{-1} = \frac{((A - B)^d)^t}{|A - B|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^2 , B^2 y $A^2 - B^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = (A - B)^{-1} \cdot (A^2 - B^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de k en cada uno de los casos siguientes: a) $\text{Rango}(A) = 1$. b) $A^2 = A$. c) A tiene inversa. d) $\det(A) = -2$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} = k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 ; k = -1$$

Luego, el rango de A es 1 si $k = 1$ ó $k = -1$

b)

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k+k^2 \\ k-k^2 & 1-k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = k \Rightarrow k = 1 \\ k+k^2 = 1+k \Rightarrow k = 1 ; k = -1 \\ k-k^2 = 1-k \Rightarrow k = 1 \\ 1-k^2 = 0 \Rightarrow k = 1 ; k = -1 \end{cases}$$

Luego, para $k = 1$, se cumple que $A^2 = A$

c) A tiene inversa para todos los valores de $k \neq 1$ y $k \neq -1$. Ya que es una matriz cuadrada y para esos valores su determinante es distinto de cero.

$$d) \begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow k^2 - 1 = -2 \Rightarrow k^2 + 1 = 0$$

No hay ningún valor de k que haga que su determinante valga -2

Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, si existen, los valores de λ para los que $A^{-1} = 2I - A$ (siendo I la matriz identidad de orden 3).

b) Determina, si existen, los valores de λ para los que la matriz $A + A^t$ no tiene inversa (A^t es la matriz traspuesta de A).

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda-1 & \lambda^2+\lambda+1 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 2I - A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2+\lambda+1=1 \Rightarrow \lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0; \lambda=-1$$

b) Calculamos

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda+1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ \lambda+1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante.

$$|A + A^t| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ \lambda+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{6}$$

Luego, la matriz $A + A^t$ no tiene inversa si $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{6}$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de $A \cdot B^t + \lambda I$ según los valores de λ (B^t es la matriz traspuesta de B , I es la matriz identidad de orden 3).

b) Calcula la matriz X que verifica: $C \cdot X - X = 2I$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A \cdot B^t + \lambda I$

$$A \cdot B^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 1) + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$|A \cdot B^t + \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $\lambda = 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 1$.

b) $C \cdot X - X = 2I \Rightarrow (C - I) \cdot X = 2I \Rightarrow X = (C - I)^{-1} \cdot 2I = 2(C - I)^{-1}$

Calculamos la matriz $C - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos la matriz inversa de $C - I$.

$$(C - I)^{-1} = \frac{((C - I)^d)^t}{|C - I|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$