PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2010

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Calcula $\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})\, dx$.

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $\sqrt{x} = t$, vamos a calcular los nuevos límites de integración.

Si $x = \pi^2 \Rightarrow \sqrt{\pi^2} = t \Rightarrow t = \pi$

Si $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = t \Rightarrow t = 0$

Vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow dx = 2t\, dt$$

Hacemos la integral por partes. Sustituyendo, nos queda:

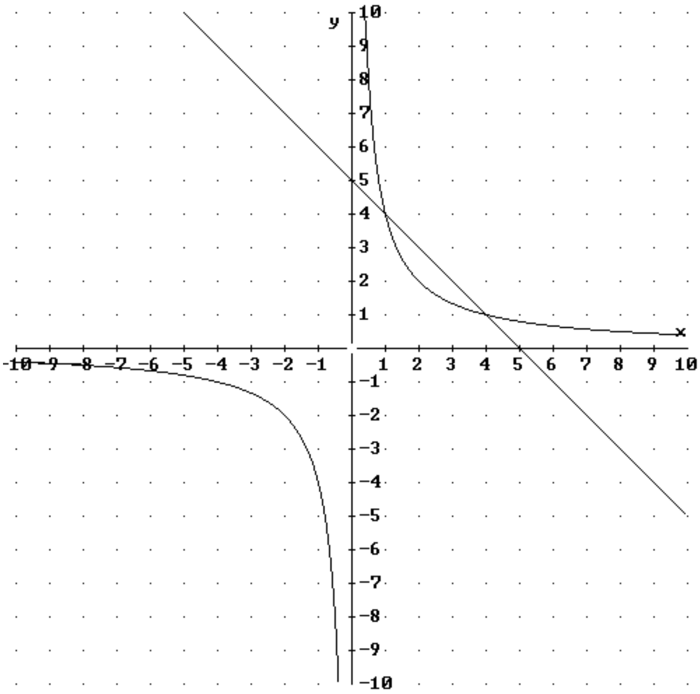
$$\int_0^{\pi} 2t \cdot sen\, t\, dt = \left[-2t\cos t + 2\int \cos t\, dt \right] = \left[-2t\cos t + 2\, sen\, t \right]_0^{\pi} = \left(-2\pi\cos\pi + 2sen\,\pi \right) - (2sen\, 0) = 2\pi$$

$u = 2t;\ \ du = 2\ dt$ $dv = sen\, t\, dt;\ v = -\cos t$

Considera la función *f* dada por $f(x)=5-x$ y la función *g* definida como $g(x)=\dfrac{4}{x}$ para $x\neq 0$.
a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* indicando sus puntos de corte.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=5-x$ es una recta, luego podemos dibujarla fácilmente con una tabla de valores. La función $g(x)=\dfrac{4}{x}$ es una hipérbola, la podemos dibujar dando 3 ó 4 valores a la derecha y a la izquierda de 0.



Vemos que las dos funciones se cortan en los puntos $(1,4)$ y $(4,1)$

b) El área de la región pedida es:

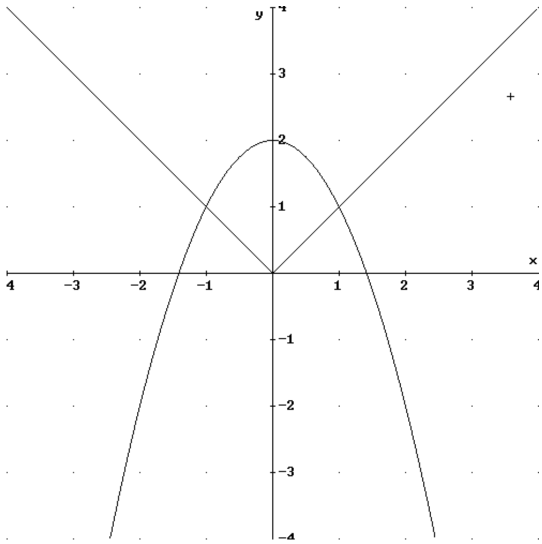
$$A=\int_1^4 (5-x-\frac{4}{x})\,dx=\left[5x-\frac{x^2}{2}-4\ln x\right]_1^4=\left(20-8-4\ln 4\right)-\left(5-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}-4\ln 4\ u^2$$

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = |x|$
a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = 2 - x^2$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $(0,2)$ y corta al eje X en los puntos $\left(\sqrt{2},0\right)$ y $\left(-\sqrt{2},0\right)$.

La función $g(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ son dos rectas, que son la bisectriz del 1º y 3er cuadrante.



b)

$$A = 2 \cdot \int_0^1 \left[(2 - x^2) - x \right] dx = 2 \cdot \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{3} \; u^2$$

Dada la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln x$, donde ln es la función logaritmo neperiano, se pide:
a) Comprueba que la recta de ecuación $y=-e\,x+1+e^2$ es la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=e$.
b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta normal del apartado (a).
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

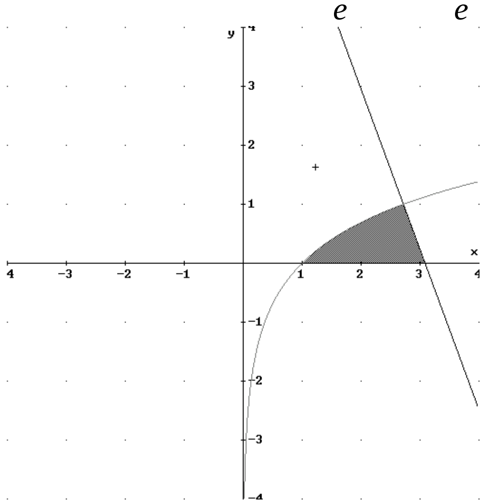
a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

La ecuación de la recta normal es:

$$y-f(e)=-\frac{1}{f'(e)}(x-e)\Rightarrow y-\ln e=-\frac{1}{\frac{1}{e}}(x-e)\Rightarrow y-1=-e(x-e)\Rightarrow y=-ex+e^2+1$$

b) Calculamos el punto de corte de la normal con el eje X.

$$0=-ex+e^2+1\Rightarrow x=\frac{e^2+1}{e}=e+\frac{1}{e}$$



El área que nos piden es:

$$A=\int_1^e(\ln x)\,dx+\int_e^{e+\frac{1}{e}}(1+e^2-ex)\,dx=\left[x\ln x-x\right]_1^e+\left[x+e^2x-\frac{ex^2}{2}\right]_e^{e+\frac{1}{e}}=$$

$$=\left[(e-e)-(-1)\right]+\left[\left(e+\frac{1}{e}+e^2\left(e+\frac{1}{e}\right)-\frac{e\left(e+\frac{1}{e}\right)^2}{2}\right)-\left(e+e^3-\frac{e^3}{2}\right)\right]=1+\frac{1}{2e}\;u^2$$

Sea $f:(-2,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x+2)$. Halla una primitiva F de f que verifique $F(0)=0$. (ln denota logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$F(x)=\int \ln(x+2)\ dx = x\ln(x+2)-\int \frac{x}{x+2}dx = x\ln(x+2)-\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx = x\ln(x+2)-x+2Ln(x+2)+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(x+2);\ du=\dfrac{1}{x+2}\ dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

Calculamos el valor de la constante *C*.

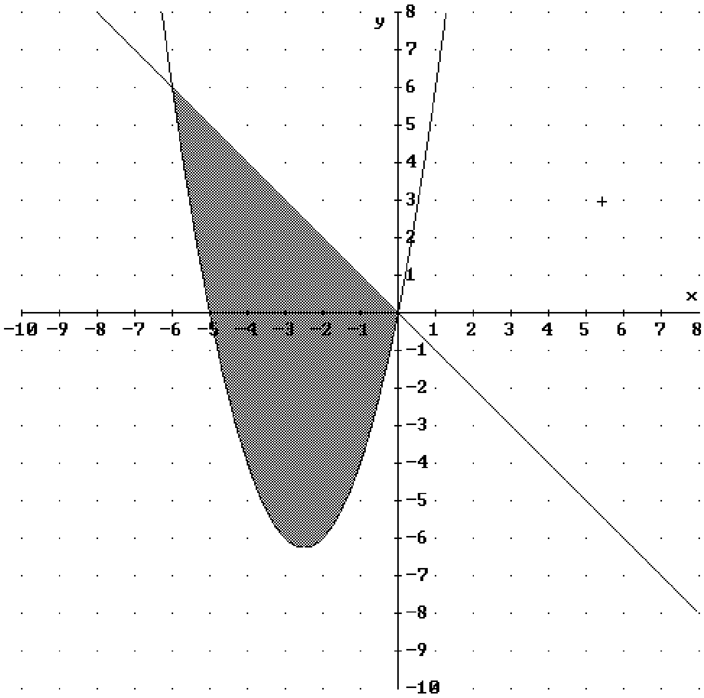
$$F(0)=0\Rightarrow 0=0\cdot\ln(0+2)-0+2Ln(0+2)+C\Rightarrow C=-2\ln 2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=x\ln(x+2)-x+2Ln(x+2)-2\ln 2$

Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de las dos funciones.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ y = x^2 + ax \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + (1+a)x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = -1-a \ .$$

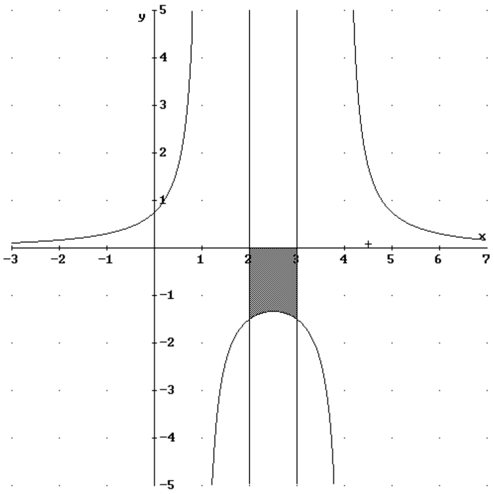
$$36 = \int_{-1-a}^{0} (-x - x^2 - ax)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_{-1-a}^{0} = -\left[-\frac{(-1-a)^2}{2} - \frac{(-1-a)^3}{3} - \frac{a(-1-a)^2}{2} \right] =$$

$$= \frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{6} \Rightarrow a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 216 \Rightarrow a^3 + 3a^2 + 3a - 215 = 0 \Rightarrow a = 5$$

Dada la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{3}{x^2-5x+4}$ para $x\neq 1$ y $x\neq 4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas, y las rectas $x=2$, $x=3$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de la gráfica.



Calculamos la integral $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-5x+4}\,dx$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=1\ ;\ x=4$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3}{x^2-5x+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-1)}{(x-1)(x-4)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A* y *B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$x=1 \Rightarrow 3=-3A \Rightarrow A=-1$

$x=4 \Rightarrow 3=3B \Rightarrow B=1$

Con lo cual:

$$\int \frac{3}{x^2-5x+4}\,dx=\int \frac{-1}{x-1}\,dx+\int \frac{1}{x-4}\,dx=-\ln(x-1)+\ln(x-4)$$

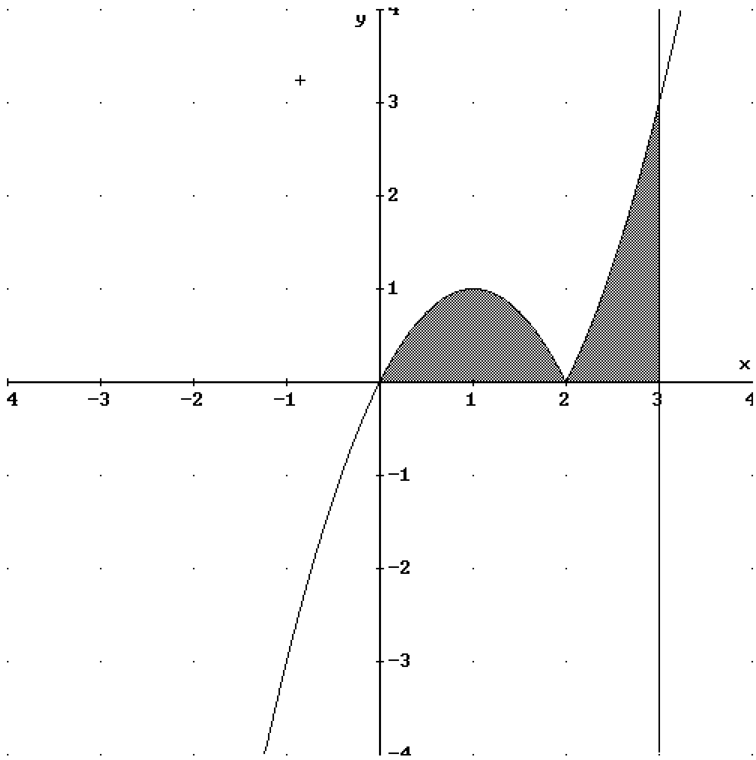
$$A=-\int_2^3 \frac{3}{x^2-5x+4}=-\left[-\ln|x-1|+\ln|x-4|\right]_2^3=-\left(-\ln 2+\ln 1\right)+\left(-\ln 1+\ln 2\right)=2\ln 2\ u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x|2-x|$.
a) Esboza su gráfica.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x=3$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x)=x|2-x|=\begin{cases} 2x-x^2 & si \;\; x<2 \\ x^2-2x & si \;\; x\geq 2\end{cases}$.

Hacemos el dibujo de las dos parábolas en sus intervalos.



b) Según vemos en la figura el área que nos piden es:

$$A=\int_0^2(-x^2+2x)\,dx+\int_2^3(x^2-2x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_2^3=$$

$$=\left[\left(-\frac{8}{3}+4\right)-0\right]+\left[(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right]=\frac{8}{3}\;u^2$$

Sea la función f dada por $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 0$. Determina una primitiva F de f tal que $F(1)=1$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$x=0 \Rightarrow 1=A$

$x=-1 \Rightarrow 1=-B \Rightarrow B=-1$

Con lo cual:

$$F(x)=\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)}\,dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

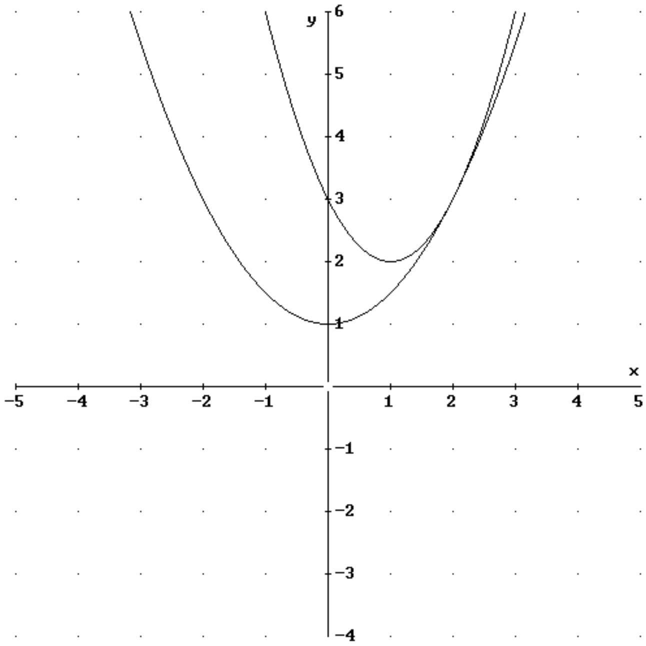
Como $F(1)=1 \Rightarrow 1=\ln|1|-\ln|1+1|+C \Rightarrow C=1+\ln 2$

Luego la primitiva que nos piden es: $F(x)=\ln|x|-\ln|x+1|+1+\ln 2$

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.
a) Esboza las gráficas de *f* y *g*, y halla su punto de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos las dos parábolas.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones.

$$x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

b) El área de la región pedida es:

$$A = \int_0^2 (x^2 - 2x + 3 - \frac{1}{2}x^2 - 1)\, dx = \int_0^2 (\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2)\, dx = \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_0^2 = \left(\frac{8}{6} - 4 + 4 \right) = \frac{8}{6}\ u^2$$

Calcula $I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}\, dx$.
a) Expresa *I* haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.
b) Determina *I*.
MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t^2 = e^{-x}$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$2t\,dt = -e^{-x}\,dx \Rightarrow dx = -\frac{2t\,dt}{e^{-x}} = -\frac{2t\,dt}{t^2} = -\frac{2\,dt}{t}$$

$$I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}\,dx = \int \frac{5}{1+t}\left(-\frac{2}{t}\right)dt = \int \frac{-10}{t(1+t)}\,dt$$

b) Es una integral racional con raíces reales simples. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-10}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, y *B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$t = 0 \Rightarrow -10 = A \Rightarrow A = -10$
$t = -1 \Rightarrow -10 = -B \Rightarrow B = 10$

Con lo cual:

$$\int \frac{-10}{t(1+t)}\,dt = \int \frac{-10}{t}\,dt + \int \frac{10}{1+t}\,dt = -10\ln t + 10\ln(1+t) = -10\ln\left|\sqrt{e^{-x}}\right| + 10\ln\left|1+\sqrt{e^{-x}}\right| + C$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2+4$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y=2x+3$. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

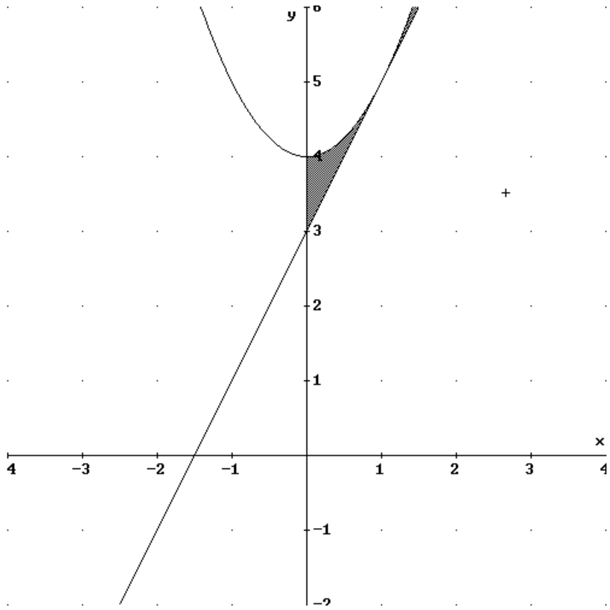
a) La ecuación de la recta tangente es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$.

$f(1)=1+4=5$

$f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-5=2\cdot(x-1)\Rightarrow y=2x+3$

b) Hacemos el dibujo del recinto.



El área de la región pedida es:

$$A=\int_0^1(x^2+4-2x-3)\,dx=\int_0^1(x^2-2x+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{1}{3}\,u^2$$